Geometria analitica e algebra lineare 2008/09

Esercizi 18/05/2009

Esercizio 1. Determinare equazioni cartesiane per il piano π_λ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenente la retta r ed il punto P_λ seguenti:

$$r = \big\{[t, t+u, u, t-u] \;\big|\; t, u \in \mathbb{R}\big\}, \quad P_\lambda = [1, \lambda, 0, 0].$$

Trovare un punto che non è contenuto in nessuno di questi piani π_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Posso trovare una retta che non è contenuta in nessun π_λ?

Esercizio 2. Siano r_1, r_2 due rette disgiunte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Siano s_1, s_2 altre due rette disgiunte. Mostrare che esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^3$ in sé tale che $f(r_1) = s_1$ e $f(r_2) = s_2$. (Una proiettività è una corrispondenza biunivoca indotta da un isomorfismo di $\mathbb{R}^4$ in sé.)

Mostrare lo stesso esercizio con due terne r_1, r_2, P e s_1, s_2, Q, con r_i, s_j rette, P e Q punti, e ogni terna è fatta da tre oggetti disgiunti.

Esercizio 3. Si considerino le rette seguenti di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$:

$$r = \big\{[t, -t, u, -u, 0] \;\big|\; t, u \in \mathbb{R}\big\}, \quad s_\lambda = \big\{[t, u + \lambda t, 0, (1+\lambda)t - u, u] \;\big|\; t, u \in \mathbb{R}\big\}$$

Sia $L_\lambda = L(s_\lambda, r)$ il più piccolo sottospazio contenente r e s_λ.

1. Determinare la dimensione di L_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Determinare equazioni cartesiane per lo spazio L_0.
3. Mostrare che le rette s_λ si intersecano tutte in un unico punto P. Determinare P.
4. Mostrare che le rette s_λ sono tutte contenute in un piano π. Determinare π.
5. Mostrare che esiste una retta L_∞ tale che
$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} L_\lambda = \pi.$$

Esercizio 4. Siano r, s, t tre rette in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, disgiunte a coppie. Dimostrare che esiste una retta u che le interseca tutte e tre. Mostrare che questa retta è unica se e solo se $L(r, s, t) = \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$.