

ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2025/26 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 27 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Sia $U \subset M$ un aperto in una varietà liscia M . Mostra che un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.3. Per ogni $0 < k < n$, la *Grassmanniana affine* $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k . Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$, in modo che venga connessa e la mappa naturale $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ che assegna ad ogni sottospazio affine la sua giacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

Esercizio 1.4. Mostra che la funzione costruita a lezione $S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.5. Una *bandiera* in uno spazio vettoriale reale V di dimensione n è il dato di $n+1$ sottospazi

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V$$

dove $\dim V_i = i$. Mostra che lo spazio di tutte le bandiere in V ha una naturale struttura di varietà liscia.

2. Esercizi del 6 marzo

Esercizio 2.1. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$

$$h(x, y, z) = (y, -x, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento di grado 4 diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 2.2. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d .

Esercizio 2.3. Sia $V = M(n+1, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale formato da tutte le matrici reali $(n+1) \times (n+1)$. Come tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita, V è in modo naturale una varietà. Mostra che la mappa

$$f : S^n \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x \cdot x^t$$

passa al quoziente e definisce un embedding

$$f : \mathbb{RP}^n \hookrightarrow V.$$

Esercizio 2.4. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.5. Costruisci un embedding del toro n -dimensionale

$$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 13 marzo

Esercizio 3.1. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \rightarrow \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 3.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre una varietà orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 3.3. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale, $S \subset M$ un chiuso, e $S \subset U \subset M$ un aperto. Una *sezione parziale* su S è una funzione liscia $s : S \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = \text{id}_M$. Mostra che ogni sezione parziale su S si estende ad una sezione $s' : M \rightarrow E$ del fibrato che è nulla fuori dall'aperto U .

Esercizio 3.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Un tensore in $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^* . Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli. Mostra che

- (1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.

(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.5. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1 .

4. Esercizi del 20 marzo

Esercizio 4.1. Siano $v_1, \dots, v_n$ base di V e $v^1, \dots, v^n$ base duale di V^* . Mostra il fatto seguente enunciato a lezione: una base per $\Lambda^k(V)$ è data dagli elementi

$$v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}$$

con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Esercizio 4.2. Siano $v^1, \dots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \dots \wedge v^k \neq 0$.

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge* che ha importanti applicazioni nella teoria dei campi elettromagnetici e nello studio delle 4-varietà.

Esercizio 4.3. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 4.4. Sia $\langle, \rangle$ un prodotto scalare su V con segnatura (p, m) . Mostra che esiste un unico prodotto scalare $\langle, \rangle$ su $\Lambda^k(V)$ tale che

$$\langle v^1 \wedge \dots \wedge v^k, w^1 \wedge \dots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$

per qualsiasi scelta di covettori $v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^k \in V^*$. Qui $\det \langle v^i, w^j \rangle$ indica il determinante della matrice $k \times k$ il cui elemento i, j è $\langle v^i, w^j \rangle$. Mostra che la segnatura di questo prodotto scalare su $\Lambda^k(V)$ è (p_k, m_k) , dove $p_k + m_k$ e $p_k - m_k$ sono i coefficienti di x^k nei polinomi

$$(1+x)^{p+m}, \quad (1+x)^p(1-x)^m.$$

In particolare se il prodotto scalare su V è definito positivo allora lo è anche quello su $\Lambda^k(V)$.

Esercizio 4.5. Sia V dotato di un prodotto scalare con segnatura (p, m) . Ogni $\Lambda^k(V)$ è munito di un prodotto scalare definito nell'esercizio precedente. Ricordiamo che $\dim \Lambda^n(V) = 1$. Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ un generatore, normalizzato in modo che

$$\langle \omega, \omega \rangle = \pm 1.$$

L'operatore stella di Hodge è la mappa lineare

$$*: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

- (1) La mappa $*$ è ben definita.
- (2) Orientiamo V^* nel modo seguente: una base $v^1, \dots, v^n$ di V^* è positiva se e solo se $v^1 \wedge \dots \wedge v^n$ è un multiplo positivo di ω . Se $v^1, \dots, v^n$ è una base positiva ortonormale per V^* , allora

$$*(v^1 \wedge \dots \wedge v^k) = (-1)^{m'} v^{k+1} \wedge \dots \wedge v^n$$

dove m' è il numero di vettori in $v^1, \dots, v^k$ tali che $\langle v^i, v^i \rangle = -1$.

- (3) Vale $\langle *\alpha, *\beta \rangle = (-1)^m \langle \alpha, \beta \rangle$. In particolare se m è pari la mappa $*$ è una isometria, e se m è dispari è una *anti-isometria*.
- (4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)+m} \beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

5. Esercizi del 27 marzo

Dato un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$, ricordiamo che il *fibrato duale* è il fibrato $E^* \rightarrow M$ le cui fibre sono gli spazi duali $(E^*)_p = (E_p)^*$ delle fibre di E . Chiariamo ora come è definita la struttura liscia di E^* . Ogni trivializzazione $\varphi: E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^k$ di E su un aperto $U \subset M$ induce una trivializzazione $\varphi^*: E^*|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^k$ di E^* sullo stesso aperto nel modo seguente:

$$\varphi^*(v^*) = (p, v^*(\varphi^{-1}(p, e_1)), \dots, \varphi^{-1}(p, e_k)))$$

dove $p = \pi(v^*)$, cioè $v^* \in E_p^*$. La struttura liscia su E^* è definita prendendo come atlante le carte φ^* , composte con i diffeomorfismi (quando esistono) tra U e un aperto di $\mathbb{R}^n$. Queste carte forniscono anche le trivializzazioni del fibrato.

Esercizio 5.1. Sia M varietà liscia con ricoprimento aperto $\{U_i\}$. Sia $f = \{f_{ij}\}$ un cociclo a valori in $GL(k, \mathbb{R})$, che quindi determina un fibrato $E \rightarrow M$. Mostra che $\{{}^t f_{ij}^{-1}\}$ è un cociclo che determina il fibrato duale $E^* \rightarrow M$.

Esercizio 5.2. Considera $\mathbb{RP}^n$ con il ricoprimento di $n+1$ aperti dato dall'atlante standard. Determina un cociclo a valori in $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ su questo ricoprimento che descriva il fibrato tautologico $\tau: E \rightarrow \mathbb{RP}^n$ dell'Esercizio 3.1.

Esercizio 5.3. Mostra che il toro ha infiniti fibrati di rango 2 non isomorfi.

Esercizio 5.4. Sia G un gruppo di Lie connesso. Sia $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ il rivestimento universale di G e $\tilde{e} \in \tilde{G}$ un punto fissato tale che $\pi(\tilde{e}) = e \in G$. Sia

$$\tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$$

il sollevamento del prodotto $G \times G \rightarrow G$ che manda $(\tilde{e}, \tilde{e})$ in $\tilde{e}$. Mostra che

- $\tilde{G}$ è un gruppo di Lie con questa operazione.
- $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, e l'operazione di gruppo sul rivestimento universale $\tilde{G}$ è univocamente determinata dalla richiesta che π sia un omomorfismo.

Esercizio 5.5. Sia X uno spazio topologico connesso per archi con punto base $x_0 \in X$. Se $n \geq 1$ possiamo definire $\pi_n(X, \{x_0\})$ come l'insieme delle funzioni continue $[-1, 1]^n \rightarrow X$ che mandano il bordo del n -cubo $C = [-1, 1]^n$ interamente in x_0 , viste a meno di omotopie che fissano il bordo del cubo. L'azione di $\pi_1(X, \{x_0\})$ su $\pi_n(X, \{x_0\})$ è definita nel modo seguente: date $[f] \in \pi_1(X, \{x_0\})$ e $[g] \in \pi_n(X, \{x_0\})$, definiamo la mappa $f \cdot g: [-1, 1]^n \rightarrow X$ come

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} g(2x) & \text{se } \|x\|_\infty \leq 1/2 \\ f(3 - 4\|x\|_\infty) & \text{se } \|x\|_\infty \geq 1/2 \end{cases}$$

Qui $\|x\|_\infty = \max\{\|x^1\|, \dots, \|x^n\|\}$. Definiamo quindi $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$.

- Mostra che $[f \cdot g] \in \pi_n(X, \{x_0\})$ è ben definita.
- Mostra che l'insieme $[S^n, X]$ di tutte le mappe $S^n \rightarrow X$ viste a meno di omotopia è in naturale corrispondenza biunivoca con le orbite di $\pi_n(X, \{x_0\})$ rispetto a questa azione.

Esercizio 5.6. Mostra che se G è un gruppo di Lie connesso, l'azione di $\pi_1(G, \{e\})$ su $\pi_n(G, \{e\})$ definita sopra è banale e quindi $[S^n, G] = \pi_n(G)$.

6. Esercizi del 3 aprile

Esercizio 6.1. Siano X, Y due campi vettoriali in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Esercizio 6.2. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 6.3. Data una matrice quadrata A , sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA - AB}.$$

Esercizio 6.4. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 6.5. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di $SO(3)$ sono l'identità, $SO(3)$, e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 6.6. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia sia foglie compatte che non compatte (cerca di descrivere la foliazione in modo rigoroso, non solo con un disegno).

7. Esercizi del 24 aprile

Esercizio 7.1. Siano M e N due varietà connesse orientate senza bordo di dimensione $n \geq 3$. Mostra che

$$\pi_1(M \# N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

dove $\#$ indica la somma connessa di varietà e $*$ il prodotto libero di gruppi (cerca la definizione in rete se non la conosci).

Esercizio 7.2. Sia $f: M \rightarrow N$ una sommersione. Mostra che se $D \subset N$ è un dominio regolare allora $f^{-1}(D) \subset M$ è un dominio regolare.

Esercizio 7.3. Sia M varietà dotata di una struttura Riemanniana g , cioè g è un campo tensoriale $(0, 2)$ su TM simmetrico e definito positivo ovunque. Se una distribuzione D è integrabile, la distribuzione ortogonale $D^\perp$ è sempre integrabile? La distribuzione ortogonale è definita in modo ovvio come $(D^\perp)_p = (D_p)^\perp$ per ogni p . (Se la risposta è sì dimostrarlo, se è no esibisci un controesempio.)

Esercizio 7.4. Considera su $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x_1, x_2, x_3) , una generica distribuzione di piani

$$D_x = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}.$$

Considera il campo $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Mostra che la distribuzione è integrabile se e solo se

$$X \cdot \text{rot} X = 0$$

in ogni punto. Qui $\text{rot} X$ indica il rotore di X .

Esercizio 7.5. Mostra che le classi di coniugio di quaternioni non reali formano una foliazione in sfere di $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$.

Esercizio 7.6. Sia $\varphi: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 7.7. Sia $f: U \rightarrow V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

8. Esercizi del 1 maggio

Esercizio 8.1. Siano X, Y campi vettoriali in una varietà M . Mostra che

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

Questa è un'uguaglianza fra operatori su $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$. Il bracket $[A, B]$ di due operatori A, B è per definizione $[A, B] = AB - BA$. Qui $\mathcal{L}_X$ è la derivata di Lie lungo X . Nota che se $(h, k) = (1, 0)$ questo è equivalente all'identità di Jacobi sui campi vettoriali. Questa uguaglianza può essere enunciata dicendo che la derivata di Lie fornisce un omomorfismo di algebre di Lie da $\mathfrak{X}(M)$ nell'algebra di Lie degli operatori su $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$.

Esercizio 8.2. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile $\iff$ per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Qui $\ker \alpha$ è la distribuzione che assegna al punto p il sottospazio $\ker \alpha(p)$.

Una *forma symplettica* su una varietà N è una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ che è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e *non-degenere*, cioè per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_p M$ esiste $w \in T_p M$ tale che $\omega(p)(v, w) \neq 0$.

Esercizio 8.3. Mostra i fatti seguenti:

- (1) Se ω è una forma symplettica su N , allora N ha dimensione pari.
- (2) Costruisci una forma symplettica su $\mathbb{R}^{2n}$ e sul toro $2n$ -dimensionale.
- (3) Sia $\pi: T^*M \rightarrow M$ il fibrato cotangente di una varietà M di dimensione n . Nota che T^*M è una varietà di dimensione $2n$. La *1-forma tautologica* $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ sulla varietà T^*M è definita nel modo seguente: un punto $\alpha \in T^*M$ è per definizione un funzionale $\alpha: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ con $p = \pi(\alpha)$. Sia $v \in T_\alpha(T^*M)$. Poniamo

$$\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$

Mostra che $d\theta$ è una forma symplettica su T^*M .

- (4) Mostra che se ω è una forma symplettica su N allora esiste un'orientazione su N per cui $\omega \wedge \dots \wedge \omega$ è una forma volume.
- (5) Deduci che se N è compatta e senza bordo, se ω è una forma symplettica su N allora $[\omega] \in H^2(N)$ non è nulla.
- (6) Deduci che l'unica sfera S^n che ha una forma symplettica è S^2 .

(Nota: Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ ha una forma symplettica.)

Esercizio 8.4. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia $M = U \cup V$ varietà con U, V aperti. Supponiamo che i numeri di Betti di $U \cap V, U, V, M$ siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Esercizio 8.5. Calcola i numeri di Betti della superficie $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$ e della superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Esercizio 8.6. Sia M una varietà connessa e $p \in M$ un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se M è semplicemente connessa allora $b^1(M) = 0$.

(Nota: in realtà il morfismo viene un isomorfismo, ma la suriettività è più difficile da dimostrare.)

Esercizio 8.7. Costruisci delle varietà orientabili e non orientabili con delle metriche Lorentziane tempo-orientabili e tempo-non orientabili (sono 4 casi).

9. Esercizi dell'8 maggio

Il simbolo S_g denota la superficie connessa compatta orientabile senza bordo di genere $g \geq 0$.

Esercizio 9.1. Siano $g, g', d \geq 1$ qualsiasi. Mostra che se $\chi(S_g) = d\chi(S_{g'})$ allora esiste un rivestimento $S_g \rightarrow S_{g'}$ di grado d (basta un disegno).

Esercizio 9.2. Sia M una n -varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 9.3. Sia $M \# N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(M \# N) &= 1 \quad \text{se } i = 0, n, \\ b^i(M \# N) &= b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n. \end{aligned}$$

Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0(S_g) = 1, \quad b^1(S_g) = 2g, \quad b^2(S_g) = 1$$

e quindi $\chi(S_g) = 2 - 2g$.

Esercizio 9.4. Dimostra il Lemma dei 5 enunciato a lezione.

Esercizio 9.5. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 9.6. Sia M una varietà compatta, senza bordo, connessa, orientata. Date due forme volume $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$, mostra che esiste un diffeomorfismo $\varphi: M \rightarrow M$ isotopo all'identità tale che $\varphi^*(\omega) = \eta$ se e solo se $\int_M \omega = \int_M \eta$. L'implicazione difficile è l'esistenza di φ , che si fa secondo questi passi:

- (1) Mostra che esiste $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ tale che $\omega - \eta = d\beta$.
- (2) Mostra che $\omega_t = \eta + td\beta$ è una forma volume per ogni $t \in [0, 1]$.
- (3) Mostra che per ogni $t \in [0, 1]$ esiste un unico $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ tale che $\iota_{X_t}(\omega_t) = \beta$. Diamo per buono che X_t dipende in modo liscio da t .
- (4) Mostra che $\mathcal{L}_{X_t}(\omega_t) = \frac{d}{dt}\omega_t$.
- (5) Mostra che esiste una famiglia liscia $\varphi_t: M \rightarrow M$ di diffeomorfismi tali che $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$.

10. Esercizi del 15 maggio

Ricordiamo che il piano iperbolico nel modello del semipiano è la varietà Riemanniana seguente:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Esercizio 10.1. Nel piano iperbolico H^2 nel modello del semipiano, calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2 .

Esercizio 10.2. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del semipiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

Esercizio 10.3. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ . Determina il trasporto parallelo lungo un arco di circonferenza (centrato nell'origine) generico usando queste coordinate e verifica che coincide con il trasporto parallelo nelle coordinate Euclidee.

Esercizio 10.4. Sia $H^2 \subset \mathbb{R}^2$ il piano iperbolico definito con il modello del semipiano. Sia $v_0 = (0, 1)$ vettore tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Determina il vettore v_t in funzione di t .

Esercizio 10.5. Costruisci una connessione su una varietà che non sia compatibile con nessuna metrica Riemanniana.

11. Esercizi del 22 maggio

Nei prossimi due esercizi H^2 è il piano iperbolico nel modello del semipiano $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$, visto come aperto nel piano complesso $\mathbb{C}$.

Esercizio 11.1. Mostra che le sfere geodetiche nel modello del semipiano H^2 del piano iperbolico sono tutte circonferenze. Puoi procedere in questo modo:

- (1) Dimostra che la geodetica uscente da $i \in H^2 \subset \mathbb{C}$ con velocità 1 e con angolo α rispetto all'asse immaginaria è

$$\gamma(t) = \frac{\sin \alpha \sinh t + i}{\cosh t - \cos \alpha \sinh t}.$$

Può essere utile usare l'Esercizio 10.2.

- (2) Mostra che la sfera geodetica di centro i e raggio t è la circonferenza di centro $i \cosh t$ e raggio $\sinh t$.
- (3) Usa delle semplici isometrie di H^2 per dedurre che le sfere geodetiche intorno a qualsiasi altro punto sono anch'esse circonferenze.

Esercizio 11.2. Mostra che la distanza fra due punti $z_1, z_2 \in H^2 \subset \mathbb{C}$ è tale che valga questa uguaglianza

$$\cosh d(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\Im z_1 \Im z_2}.$$

Esercizio 11.3. Considera il modello dell'iperboloide $H^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico. Mostra che per ogni $p, q \in H^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q \rangle.$$

Esercizio 11.4 (Il toro di Clifton – Pohl). Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$g(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria per questa metrica. In particolare possiamo quozientare M con l'isometria $f(x, y) = (2x, 2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T . Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0 \right), \quad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geodeticamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per il teorema di Hopf – Rinow).

Quando una varietà è espressa con delle coordinate come t, x, y , è naturale indicare i simboli di Christoffel come $\Gamma_{xy}^t, \Gamma_{tt}^x$, eccetera.

Esercizio 11.5. Considera lo spaziotempo di Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ con coordinate t, x, y, z . Rappresentalo con le coordinate sferiche t, r, θ, φ , dove $\theta \in (0, \pi)$ è l'angolo polare, che fa $\theta = 0$ al polo nord e $\theta = \pi$ al polo sud, e $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ è la longitudine. Mostra che il tensore metrico in queste coordinate diventa

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Calcola i simboli di Christoffel in queste coordinate. Scrivi le equazioni differenziali delle geodetiche in queste coordinate (senza risolverle).

Lo spaziotempo di Schwarzschild di raggio $R \geq 0$ è la varietà

$$M = \mathbb{R} \times (R, +\infty) \times S^2$$

con variabili t, r, θ, φ , dotata del tensore metrico lorentziano

$$g = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{R}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{R}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Per $R = 0$ questo è semplicemente lo spaziotempo di Minkowski scritto in coordinate sferiche. La varietà M descrive lo spaziotempo intorno ad un buco nero statico (cioè non rotante) di massa proporzionale al parametro R , chiamato *raggio di Schwarzschild*. Osserviamo che il tensore metrico non si estende a $r = R$. Orientiamo temporalmente questo spaziotempo chiedendo che il campo vettoriale di tipo tempo $\partial/\partial t$ sia ovunque futuro.

Esercizio 11.6. Sia γ una geodetica nello spaziotempo di Schwarzschild M . Calcola i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k con $k = t$, scrivi l'equazione della geodetica

nella variabile t , cioè quella che inizia con $\ddot{t} = \dots$ e deduci che la quantità

$$E = \dot{t} \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

è costante lungo il moto di γ . Questo implica che se $r \rightarrow R$ allora $\dot{t} \rightarrow \infty$, e sembrerebbe dire che per cadere nel buco nero serva un tempo infinito. In realtà ora vediamo che questo non è affatto vero! La variabile t è solo una coordinata (non esiste un tempo assoluto) e non è il tempo proprio di una particella che si muove.¹

Sia $\gamma: [0, T) \rightarrow M$ una geodetica massimale di tipo tempo diretta verso il futuro, parametrizzata in modo che $\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = -1$, e che sia del tipo

$$\gamma(u) = (t(u), r(u), \theta_0, \varphi_0)$$

con $\gamma(0) = (0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ e $\dot{r}(0) = 0$. Questa geodetica rappresenta un oggetto che cade partendo da fermo da un punto ad altezza $r_0 > R$ verso il centro del buco nero. Mostra che

$$E^2 = 1 - \frac{R}{r_0}, \quad (\dot{r})^2 = \frac{R}{r} - \frac{R}{r_0}, \quad \dot{t} = \frac{r}{r - R} E.$$

Deduci che $T < \infty$ e che per $u \rightarrow T$ abbiamo $r(u) \rightarrow R$ e $t(u) \rightarrow \infty$. L'oggetto in caduta libera esce in un tempo finito dallo spaziotempo, e questo suggerisce che in realtà M sia solo una porzione di uno spaziotempo più grande, che esaminiamo nel prossimo esercizio.

Esercizio 11.7. Mostra che per $R > 0$ lo spaziotempo di Schwarzschild M è isometrico all'aperto $r > R$ nello spaziotempo $N = \mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^2$ con variabili v, r, θ, φ e tensore metrico

$$h = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{R}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

L'isometria è $(t, r, \theta, \varphi) \mapsto (v, r, \theta, \varphi)$ con $v = t + r + R \ln \left(\frac{r}{R} - 1 \right)$.

Abbiamo scoperto che lo spaziotempo di Schwarzschild è in realtà contenuto in uno spaziotempo N più grande. L'*orizzonte degli eventi* è la sottovarietà di N di equazione $r = R$.

- (1) Mostra che N è tempo orientabile, e orientalo in modo che estenda l'orientazione di M .
- (2) Mostra che se una curva di tipo tempo diretta verso il futuro attraversa l'orizzonte degli eventi lo fa per forza da fuori, cioè con $r' < 0$. Deduci che un oggetto che attraversa l'orizzonte degli eventi non può più tornare indietro.

¹Se restiamo a dovuta distanza e guardiamo qualcuno cadere in un buco nero, a noi sembra che ci metta un tempo infinito, a lei/lui no.

- (3) (Facoltativo) Mostra che la geodetica γ considerata nell'esercizio precedente ha un tempo di vita più lungo in N , ma comunque finito.²

12. Esercizi del 29 maggio

Esercizio 12.1. Sia $f: M \rightarrow N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento liscio. Mostra che M è completa $\iff N$ è completa.

Esercizio 12.2. Nello spaziotempo di Schwarzschild, mostra che il tensore di Ricci è nullo in ogni punto di M , ma il tensore di Riemann no.³

Esercizio 12.3. Dimostra che S^2 ha curvatura sezionale costante $+1$, calcolando in una carta il tensore di Riemann.

Il simbolo $\mathbb{H}^n$ denota lo spazio iperbolico. Negli esercizi seguenti puoi usare il modello di $\mathbb{H}^n$ che preferisci (iperboloide, semispazio, palla).

Esercizio 12.4. Dimostra che $\mathbb{H}^2$ ha curvatura sezionale costante -1 , calcolando in una carta il tensore di Riemann.

Esercizio 12.5. Mostra che $\mathbb{H}^4$ non è isometrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Una varietà pseudo-Riemanniana M è *simmetrica* se $\nabla R = 0$ dove R è il tensore di Riemann.

Esercizio 12.6. Supponiamo che per ogni $p \in M$ esista un'isometria $\varphi \in \text{Isom}(M)$ tale che $\varphi(p) = p$ e $d\varphi_p = -\text{id}$. Mostra che M è simmetrica. Deduci che le varietà Riemanniane seguenti sono simmetriche:

- Prodotti di varietà $\mathbb{H}^n, S^n, \mathbb{R}^n$, ad esempio $\mathbb{H}^2 \times S^2$.
- Il sottoinsieme aperto $P(n) \subset S(n)$ delle matrici $n \times n$ simmetriche definite positive, con il tensore metrico

$$g(A)(X, Y) = \text{tr}(A^{-1}XA^{-1}Y)$$

definito per ogni $A \in P(n)$ e $X, Y \in T_A P(n) = S(n)$. Mostra che g è effettivamente un campo tensoriale definito positivo e $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ agisce isometricamente su $P(n)$ per congruenza (cioè $M \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$ manda A in ${}^t M A M$). Mostra che anche $A \mapsto A^{-1}$ è una isometria di $P(n)$. Deduci da questi fatti l'esistenza di una isometria φ come sopra per ogni $A \in P(n)$.

²Questa volta però non esiste nessun modo di allargare ulteriormente lo spaziotempo, perché la curvatura tende a infinito. Questa è quella che viene chiamata una singolarità.

³Questa è la metrica che descrive lo spaziotempo intorno ad una stella o ad un buco nero non carico e non ruotante: il tensore di Ricci è nullo perché non c'è massa, ma il tensore di Riemann non è nullo, perché lo spaziotempo può comunque essere curvo anche dove non c'è massa.

Esercizio 12.7. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ . Calcola il tensore di Riemann rispetto a queste variabili. Sai già che valori devono uscire?