Compitino di Analisi II/A

14 novembre 1997

1. *Sia (f_n) la successione di funzioni definita da*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Calcolare il limite puntuale f_∞ di (f_n) e dimostrare che la convergenza non è uniforme su $\mathbf{R}$, ma lo è su ogni semiretta $[a;\infty[$ con $a > 0$.

<u>Soluzione.</u> Fissiamo un qualunque $x_0 \in \mathbf{R}$. Se $x_0 = 0$, allora $f_n(x_0) = 0$ per ogni n e dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0.$$

Se $x_0 \neq 0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} = 0$$

essendo il denominatore di grado 2 in n rispetto al numeratore di grado 1 in n. Quindi (f_n) converge puntualmente a $f_\infty \equiv 0$ su tutto $\mathbf{R}$.

Per studiare la convergenza uniforme calcoliamo

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)|.$$

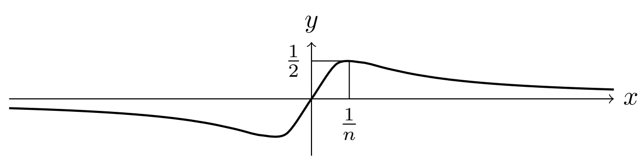
La funzione f_n è dispari e la sua derivata prima è

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Dunque la derivata prima si annulla per $x = \frac{1}{n}$ e $x = -\frac{1}{n}$ (e si ha $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, $f_n(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2}$) ed è positiva per $x \in]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}[$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$$

dunque il grafico approssimativo di f_n è dato da



In conclusione si trova

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2}$$

e quindi la convergenza non è uniforme su $\mathbf{R}$.

Sia ora $a > 0$. Per quanto già visto la funzione f_n è positiva e decrescente per $x \geq \frac{1}{n}$ quindi

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \quad \forall n \geq \frac{1}{a}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq a} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{na}{1+n^2a^2} = 0$$

cioè si ha convergenza uniforme sull'intervallo $[a;\infty[$.

2. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) + 2tx(t) = tx^3(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione, scritta nella forma

$$x' = t(x^3 - 2x)$$

è a variabili separabili, dunque

$$\int \frac{x'}{x^3 - 2x}\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c.$$

Calcoliamo $\int \frac{1}{x^3-2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(x^2-2)}\,\mathrm{d}x$. Scomponendo

$$\frac{1}{x(x^2-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-\sqrt{2}} + \frac{c}{x+\sqrt{2}}$$

si ha

$$1 = a(x^2 - 2) + b(x + \sqrt{2})x + c(x - \sqrt{2})x$$

quindi

$$1 = (a + b + c)x^2 + (b - c)\sqrt{2}x - 2a$$

e si possono ricavare a, b e c ponendo

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -2a = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2-2)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{4(x-\sqrt{2})} + \frac{1}{4(x+\sqrt{2})}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\log|x| + \frac{1}{4}\log|x-\sqrt{2}| + \frac{1}{4}|x+\sqrt{2}|. \end{aligned}$$

Sappiamo che $x(0) = 1 \in]0;\sqrt{2}[$ dunque consideriamo il caso $0 < x < \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2-2)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log(\sqrt{2}-x) + \frac{1}{4}\log(\sqrt{2}+x) \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{x^2} = \frac{1}{4}\log\frac{2-x^2}{x^2}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\frac{1}{4}\log\frac{2-x^2}{x^2} = \frac{t^2}{2} + c$$

e ponendo $x(0) = 1$ si ricava $c = 0$ e esplicitando x si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{2 - x^2(t)}{x^2(t)} &= e^{2t^2} \\ \frac{2}{x^2(t)} - 1 &= e^{2t^2} \end{aligned}$$

$$x^2(t) = \frac{2}{1 + e^{2t^2}}$$

da cui, essendo $x(0) = 1 > 0$ si ricava

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{1 + e^2 t^2}}$$

che è la soluzione cercata (in quanto effettivamente per ogni t si ha $0 < x(t) < \sqrt{2}$ come avevamo supposto).