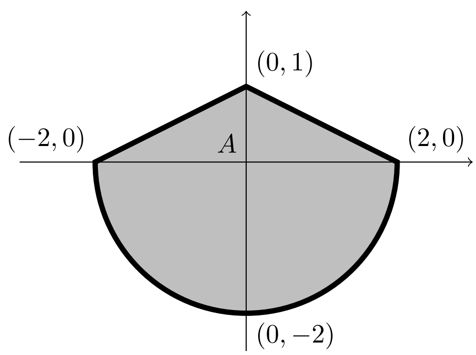
Compitino di Analisi II/A

15 dicembre 1997

1. *Sia $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x$. Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f sull'insieme*

$$A = \{(x,y)\colon y \le 1 - \frac{|x|}{2},\ x^2+y^2 \le 4\}.$$

Soluzione. L'insieme A è descritto nella figura. Calcoliamo i punti di massimo



e minimo relativo di f all'interno di A. Le derivate parziali di f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

si annullano nei punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ ed entrambi questi punti sono interni ad A. Studiando le derivate seconde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 \end{aligned}$$

troviamo la matrice Hessiana nei due punti critici

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(1,0) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{H}f(-1,0) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e possiamo quindi concludere che il punto $(1,0)$ è di minimo relativo mentre $(-1,0)$ è un punto di sella.

Passiamo ora a calcolare i punti di massimo e minimo sulla frontiera di A che è formata da tre tratti di curva:

(a) $y = 1 - \frac{x}{2}$ con $0 \le x \le 2$;

(b) $y = 1 + \frac{x}{2}$ con $-2 \le x \le 0$;

(c) $x^2 + y^2 = 4$ con $-2 \le x \le 2$ e $y \le 0$.

(a) Nel primo caso ($0 \leq x \leq 2,\ y \geq 0$) la funzione ristretta alla frontiera diventa

$$\varphi(x) = x^3 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 3x = x^3 + \frac{x^2}{4} - 4x + 1.$$

Calcoliamo quindi massimo e minimo di φ su $[0;2]$. Dallo studio della derivata

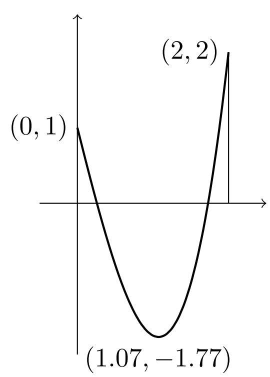
$$\varphi'(x) = 3x^2 + \frac{x}{2} - 4;$$

$$\varphi'(x) = 0 \iff 6x^2 + x - 8 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{193}}{12} = \begin{cases} \sim 1.07 \\ \sim -1.24 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) \leq 0 \iff \frac{-1 - \sqrt{193}}{12} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{193}}{12}$$

troviamo che $\varphi(2) = 2$ è il massimo di φ mentre il minimo è

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{193} - 1}{12}\right) = \frac{1153 - 193\sqrt{193}}{864} \cong -1.77.$$



(b) Nel secondo tratto di frontiera ($-2 \leq x \leq 0,\ y \geq 0$) la restrizione della funzione è data da

$$\varphi(x) = x^3 + (1 + \frac{x}{2})^2 - 3x = x^3 + \frac{x^2}{4} - 2x + 1$$

e studiando la derivata otteniamo

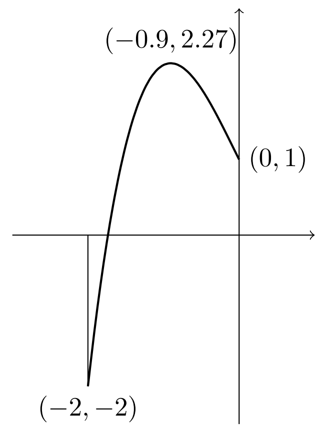
$$\varphi'(x) = 3x^2 + \frac{x}{2} - 2$$

$$\varphi'(x) = 0 \iff 6x^2 + x - 3 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{12} = \begin{cases} \sim 0.73 \\ \sim -0.9 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) \leq 0 \iff \frac{-1 - \sqrt{97}}{12} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{97}}{12}.$$

Quindi il minimo di φ è $\varphi(-2) = -2$ e il massimo è

$$\varphi\left(\frac{-1 - \sqrt{97}}{12}\right) = \frac{1009 + 97\sqrt{97}}{864} \cong 2.27.$$



(c) Nel terzo tratto di curva ($-2 \leq x \leq 2$, $y \leq 0$) la restrizione della funzione alla frontiera è data da

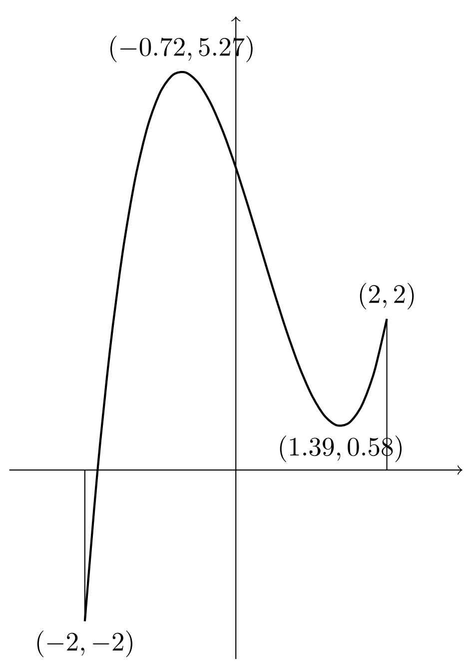
$$\varphi(x) = x^3 + 4 - x^2 - 3x$$

e studiando la derivata otteniamo

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

$$\varphi'(x) = 0 \iff 3x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} = \begin{cases} \sim 1.39 \\ \sim -0.72 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) \leq 0 \iff \frac{1-\sqrt{10}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{10}}{3}.$$



Calcolando

$$\varphi(-2) \quad = \quad -2$$

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) &= \frac{79+20\sqrt{10}}{27} \cong 5.27 \\
\varphi\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) &= \frac{79-20\sqrt{10}}{27} \cong 0.58
\end{aligned}
$$

si vede che il massimo di φ è $\varphi(\frac{1-\sqrt{10}}{3})$ e il minimo di φ è $\varphi(-2) = -2$.

Riassumendo i possibili punti di massimo assoluto sono:

$$
\begin{aligned}
f(2,0) &= 2 \\
f\left(\frac{-1-\sqrt{97}}{12}, \frac{23-\sqrt{97}}{24}\right) &\cong 2.27 \\
f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, -\sqrt{\frac{25+2\sqrt{10}}{9}}\right) &= \frac{79+20\sqrt{10}}{27} \cong 5.27
\end{aligned}
$$

quindi il valore massimo di f su A è

$$
\frac{79+20\sqrt{10}}{27}.
$$

Analogamente i possibili punti di minimo sono:

$$
\begin{aligned}
f(1,0) &= -2 \\
f\left(\frac{\sqrt{193}-1}{12}, \frac{23+\sqrt{193}}{24}\right) &\cong -1.77 \\
f(-2,0) &= -2
\end{aligned}
$$

e quindi il valore minimo di f su A è

$$
-2.
$$

2. *Consideriamo la superficie $S = \{(x,y,z)\colon xyz = 1\}$. Calcolare i punti di S che hanno minima distanza dall'origine.*

Soluzione. Su S si ha $z = \frac{1}{xy}$, quindi la distanza dei punti di S da $(0,0,0)$ è data da

$$
d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}}.
$$

Dunque il problema si riconduce a minimizzare la funzione $f(x,y) = x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$. Troviamo innanzitutto i punti critici di f:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - \frac{2}{x^3y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - \frac{2}{y^3x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0 \\ 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4y^2 = 1 \\ x^2y^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = \frac{1}{x^4} \\ x^6 = 1 \end{cases} .
$$

Le derivate prime si annullano contemporaneamente nei quattro punti $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$. Calcolando anche le derivate seconde si ottiene

$$
\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} 2+\frac{6}{x^4y^2} & \frac{4}{x^3y^3} \\ \frac{4}{x^3y^3} & 2+\frac{6}{y^4x^2} \end{pmatrix}.
$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(1,1) &= \mathcal{H}f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \\ \mathcal{H}f(1,-1) &= \mathcal{H}f(-1,1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè tutti e quattro i punti sono punti di minimo relativo per f su Ω e si ha $f(\pm 1, \pm 1) = 3$.

Per poter concludere che questi punti sono i punti di distanza minima assoluta, basta verificare che la funzione distanza ammette minimo su S.

Notiamo innanzitutto che S è un insieme chiuso e dimostriamo che la funzione distanza $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ammette minimo su ogni insieme chiuso e non vuoto. Sia infatti $p_0 \in S$ un punto fissato. Possiamo considerare la palla chiusa di raggio $r = d(p_0)$ definita da $B_r = \{p \in \mathbf{R}^3 \colon d(p) \leq r\}$; l'insieme $B_r \cap S$ è compatto (essendo S chiuso e B_r compatto) e non è vuoto (essendo $p_0 \in S \cap B_r$) quindi la funzione d ammette minimo su $S \cap B_r$ e tale minimo dovrà essere minore o uguale a r. D'altra parte fuori dalla palla B la funzione distanza sarà per definizione maggiore di r e quindi il minimo di d sulla palla B_r è in realtà un minimo assoluto.