

Compito di Analisi II/A 23 giugno 1998

1. Calcolare il valore massimo e il valore minimo della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy + 3x$$

sul quadrato $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Soluzione. Per trovare i punti critici interni al quadrato calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 6y + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y - 6x.\end{aligned}$$

Perché le derivate parziali si annullino contemporaneamente si deve avere quindi $x = y$ e $x^2 - 2x + 1 = 0$, cioè $x = y = 1$. Dunque l'unico punto critico di f è il punto $(1, 1) \in Q$. Consideriamo ora le restrizioni di f ai quattro lati del quadrato: $f_1(t) = f(t, 0)$, $f_2(t) = f(t, 3)$, $f_3(t) = f(0, t)$, $f_4(t) = f(3, t)$ tutte definite per $t \in [0, 3]$. Cerchiamo ora i punti critici di queste quattro funzioni, cioè i punti $t \in [0, 3]$ in cui si annulla la derivata:

$$\begin{aligned}f'_1(t) &= 3t^2 + 3 = 0 & t &= 0 \\ f'_2(t) &= 3t^2 - 15 = 0 & t &= \sqrt{5} \\ f'_3(t) &= 3t^2 = 0 & t &= 0 \\ f'_4(t) &= 6t - 18 = 0 & t &= 3.\end{aligned}$$

Considerando anche i vertici del quadrato dobbiamo confrontare i seguenti valori di f :

$$\begin{aligned}f(1, 1) &= 1 \\ f(\sqrt{5}, 3) &= 27 - 10\sqrt{5} \cong 4.6 \\ f(0, 0) &= 0 \\ f(0, 3) &= 27 \\ f(3, 0) &= 36 \\ f(3, 3) &= 9\end{aligned}$$

dunque il massimo assoluto si ha per $(x, y) = (3, 0)$ ed è 36 mentre il minimo assoluto si ha per $(x, y) = (0, 0)$ ed è 0.

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \sin t \\ x(0) = a \end{cases}$$

nei tre casi $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$, indicando in ognuno il dominio massimo di esistenza della soluzione.

Soluzione. L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili. Notiamo subito che $x(t) = 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale e, essendoci unicità delle soluzioni, sappiamo che per ogni altra soluzione $x(t) \neq 0$ per ogni t .

Supponendo dunque $x(t) \neq 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = \sin t$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \frac{-1}{x(t)} = \frac{d}{dt} -\cos t$$

e quindi otteniamo

$$\frac{1}{x(t)} = \cos t + c$$

sapendo che $x(0) = a$ otteniamo $c = \frac{1}{a} - 1$.

In conclusione per $a = 0$ abbiamo la soluzione $x(t) = 0$ che è definita su tutto \mathbf{R} . Per $a = 1$ abbiamo $x(t) = \frac{1}{\cos t}$ che è definita su $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ e per $a = -1$ abbiamo $x(t) = \frac{1}{\cos t - 2}$ che è definita su tutto \mathbf{R} .

3. *Studiare il comportamento della serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{nx}{2n-1} \right)^n.$$

Soluzione. La serie di potenze è della forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

con $a_n = \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n > 0$. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - 1/n} = \frac{1}{2}.$$

Dunque il raggio di convergenza della serie è 2 cioè la serie converge assolutamente per $|x| < 2$, converge uniformemente per $|x| \leq 2 - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e non converge per $|x| > 2$.

Per quanto riguarda $|x| = 2$ si ha

$$|a_n x^n| = \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^n = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2n}} \right)^n > 1$$

cioè il termine generico della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge.