

Esercizi
4 dicembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Si consideri*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

(a) *Si provi che tale integrale è definito e finito per ogni $\alpha > 0$.*

Soluzione. La funzione integranda è positiva e continua (per $t > 0$), dunque è integrabile sull'intervallo $]0, +\infty[$. Proviamo ora che è sommabile. Notiamo che per $t \in]0, 1]$ si ha $0 \leq t^{\alpha-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$ quindi

$$0 \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = 1/\alpha.$$

Per $t \geq 1$ dobbiamo invece notare che $t^{\alpha-1}$ può essere stimato con l'esponenziale e^t . Ad esempio, sapendo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^{t/2}} = 0$$

ne deduciamo che esiste $t_0 > 0$ tale che per ogni $t > t_0$ si ha $t^{\alpha-1} \leq e^{t/2}$ e dunque $t^{\alpha-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}$. Dunque otteniamo¹

$$0 \leq \int_{t_0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-t/2} dt \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 2.$$

Siccome l'integrale $\int_1^{t_0} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ è ovviamente finito, anche l'integrale $\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ è somma di tre integrali finiti ed è quindi finito.

(b) *Si provi quindi che $\Gamma(n+1) = n!$ per ogni intero positivo n (cioè ha le proprietà: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$).*

Si ha

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

D'altra parte, integrando per parti si trova anche

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = [-t^n e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n). \end{aligned}$$

2. *Provare che la funzione $f(x) = x \log x + 4x - x^2/2$ è invertibile in $[1, e]$. Detta g la funzione inversa, calcolare*

$$\int_{f(1)}^{f(e)} g(s) ds.$$

(Si tenga presente il significato geometrico dell'integrale.)

Soluzione. Si ha $f'(x) = \log x + 1 + 4 - x = \log x - x + 5$ siccome se $x \in [1, e]$ si ha $\log x \in [0, 1]$ e $-x \in [-e, -1]$ in tale intervallo $f'(x)$ è strettamente positivo. Dunque in tale intervallo la funzione f è crescente e quindi invertibile.

¹Si può ottenere una soluzione più semplice sapendo che per ogni $\beta > 0$ esiste $c > 0$ tale che se $t > 0$ allora $t^k \leq ce^t$.

Sapendo che l'integrale di una funzione è l'area del sottografico, si nota che nel piano (x, s) il rettangolo $[0, e] \times [0, f(e)]$ è formato dai tre pezzi: $[0, 1] \times [0, f(1)]$, il sottografico di f e il sottografico di g .

Dunque

$$\begin{aligned} \int_{f(1)}^{f(e)} g(s) \, ds &= ef(e) - f(1) - \int_1^e f(x) \, dx \\ &= e(e + 4e - e^2/2) - 4 + 1/2 - \int_1^e (x \log x + 4x - x^2/2) \, dx \end{aligned}$$

integrando per parti $x \log x$

$$\begin{aligned} &= 5e^2 - e^3/2 - 7/2 - \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^e + \int_1^e x/2 \, dx - \left[2x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_1^e \\ &= 5e^2 - e^3/2 - 7/2 - e^2/2 + [x^2/4]_1^e - 2e^2 + e^3/6 + 2 - 1/6 \\ &= 5e^2 - e^3/2 - 7/2 - e^2/2 + e^2/4 - 1/4 - 2e^2 + e^3/6 + 2 - 1/6 \\ &= -e^3/3 + 11/4e^2 - 23/12. \end{aligned}$$

Un'alternativa è calcolare l'integrale per sostituzione:

$$\begin{aligned} s &= f(x) \\ ds &= f'(x) \, dx \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{f(1)}^{f(e)} g(s) \, ds &= \int_1^e x f'(x) \, dx \\ &= \int_1^e (x \log x - x^2 + 5x) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^e - \int_1^e x/2 \, dx + [-x^3/3 + 5x^2/2]_1^e \\ &= [x^2/2 \log x - x^2/4 - x^3/3 + 5x^2/2]_1^e \\ &= e^2/2 - e^2/4 - e^3/3 + 5e^2/2 + 1/4 + 1/3 - 5/2 \\ &= -e^3/3 + 11e^2/4 - 23/12. \end{aligned}$$

3. (a) Si consideri la funzione

$$\Theta(\beta) = \int_1^\infty \frac{\sin(\beta^2 x^2)}{x^2} \, dx.$$

Provare che la funzione Θ è continua e derivabile nei $\beta > 0$. Si osservi invece che la derivata rispetto a β dell'integranda non è integrabile nemmeno in senso improprio.

• Il testo è sbagliato. In effetti come provato in quanto segue la derivata dell'integranda è integrabile in senso improprio, pur non essendo integrabile in senso generalizzato.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\beta^2 x^2)}{x^2} \, dy$$

esiste in senso generalizzato ed è finito. Infatti la funzione integranda è misurabile in quanto continua ed è sommabile poiché il suo modulo è minore di $\frac{1}{x^2}$ e quest'ultima funzione è sommabile su $[1, \infty[$.

In generale, per ogni $\beta > 0$ si ha (pongo $y = \beta x$):

$$\Theta(\beta) = \int_1^\infty \frac{\sin(\beta^2 x^2)}{x^2} dx = \beta \int_\beta^\infty \frac{\sin y^2}{y^2} dy$$

Quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale la nostra funzione $\Theta(\beta)$ è derivabile e la sua derivata è

$$\int_\beta^{+\infty} \frac{\sin y^2}{y^2} dy - \frac{\sin \beta^2}{\beta}.$$

La derivata rispetto a β della funzione integranda è

$$2\beta \cos(\beta^2 x^2)$$

Dunque si ha

$$\int_1^c 2\beta \cos(\beta^2 x^2) dx = \int_1^c \frac{2x\beta^2 \cos(\beta^2 x^2)}{\beta x} dx$$

integrando per parti

$$= \left[\frac{\sin \beta^2 x^2}{\beta x} \right]_1^c + \int_1^c \frac{\sin \beta^2 x^2}{\beta x^2} dy$$

che ha limite per $c \rightarrow +\infty$

$$-\frac{\sin \beta^2}{\beta} + \int_\beta^{+\infty} \frac{\sin y^2}{y^2} dy$$

che è proprio $\Theta'(\beta)$. Quindi la derivata dell'integranda è integrabile in senso improprio.

Però non è integrabile in senso generalizzato poiché le parti positiva e negativa di $\cos \beta^2 x^2$ sono rispettivamente maggiore delle parti positiva e negativa di $\frac{\cos \beta^2 x^2}{x}$ per $x > 1$. D'altronde gli integrali di tali funzioni si trasformano con il cambiamento di variabile $x^2 = y$ negli integrali delle parti positiva e negativa di $\frac{\cos \beta^2 y}{2y}$. Ripetendo i calcoli dell'esempio 7.20 pag. 182 del libro di testo si ha che quest'ultime funzioni non sono sommabili. Quindi la funzione $\cos \beta^2 x^2$ non è integrabile in senso generalizzato rispetto alla variabile x sulle semirette.

(b) Si consideri la funzione

$$\Lambda(\beta) = \int_1^2 t^\beta e^{-t} dt$$

definita per ogni β . Si provi che Λ è una funzione continua. Si provi anche che è derivabile e la derivata è

$$\Lambda'(\beta) = \int_1^2 t^\beta \log t e^{-t} dt.$$

Soluzione. Si considera

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(\beta + h) - \Lambda(\beta)}{h} - \int_1^2 t^\beta \log t e^{-t} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{t^{\beta+h} - t^\beta}{h} - t^\beta \log t \right) e^{-t} dt \end{aligned}$$

osservando che l'integranda della candidata derivata di Λ è proprio la derivata rispetto a β dell'integranda di Λ , per il teorema di Lagrange si ha, per opportuni $\gamma = \gamma(t, h, \beta)$ compresi tra β e $\beta + h$

$$= \int_1^2 (t^\gamma \log t - t^\beta \log t) e^{-t} dt$$

quindi per la disuguaglianza triangolare degli integrali

$$\left| \frac{\Lambda(\beta + h) - \Lambda(\beta)}{h} - \int_1^2 t^\beta \log t e^{-t} dt \right| \leq \int_1^2 |t^{\gamma-\beta} - 1| t^\beta |\log t| e^{-t} dt$$

Osservando che se $t \geq 1$ allora $t^{|c|} - 1 \geq |t^c - 1|$, in quanto $t^c + 1/t^c \geq 2$, si ha

$$\left| \frac{\Lambda(\beta + h) - \Lambda(\beta)}{h} - \int_1^2 t^\beta \log t e^{-t} dt \right| \leq$$

$$\int_1^2 (t^{|h|} - 1) t^\beta |\log t| e^{-t} dt \leq (2^{|h|} - 1) \int_1^2 t^\beta |\log t| e^{-t} dt$$

che è infinitesimo per $h \rightarrow 0$.