Esercizi
6 novembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Sia* $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. *Si dimostri che l'unico punto di continuità della funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot D(x)$ *è* 0.

   Dimostriamo innanzitutto che f è continua in 0. Siccome $f(0) = 0$ dobbiamo verificare che
   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$
   Siccome $|f(x)| \leq |x|$ basterà scegliere $\delta = \varepsilon$ per concludere positivamente.

   Sia ora $x_0 \neq 0$. Dimostrare che f non è continua in x_0 significa dimostrare che
   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\colon \quad (|x - x_0| \leq \delta \text{ e } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon).$$
   Scegliamo $\varepsilon = |x_0|/2$. Se x_0 è razionale abbiamo $f(x_0) = x_0$ ma nell'intervallo $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ è possibile trovare un punto x irrazionale per il quale si avrà $|f(x)| = 0$ e quindi $|f(x) - f(x_0)| = |x_0| > \varepsilon$. Similmente, se x_0 è irrazionale si ha $f(x_0) = 0$ ma nell'intervallo $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ è possibile trovare un punto x razionale e tale che $|x - x_0| < \varepsilon$. Dunque $|f(x)| = |x| > |x_0| - \varepsilon = \varepsilon$ e quindi si ha ancora $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

2. (a) *Si provi* $\forall x, y \geq 0 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

   Supponiamo per semplicità $x \geq y$. Allora è sufficiente mostrare che $\sqrt{x} \leq \sqrt{x - y} + \sqrt{y}$. Elevando al quadrato si trova che è sufficiente verificare che $x \leq x - y + y + 2\sqrt{(x - y)y}$ che è ovviamente vero.

   (b) *Si provi che è vero*
   $$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon$$
   Questo corrisponde a verificare che la funzione $f(x) = x^2$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Dato $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ si scelga $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2(|x|+1)}, 1\}$. Preso un qualunque y tale che $|x - y| \leq \delta$ si ha
   $$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq \delta |x + y|.$$
   Usando la disuguaglianza triangolare e avendo scelto $\delta \leq 1$ si ha $|x + y| \leq |2x| + |y - x| \leq 2|x| + 1$. E quindi, come si voleva dimostrare, $\delta|x + y| \leq 2\delta(|x| + 1) \leq \varepsilon$.

   (c) *Si provi che non è vero*
   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon$$
   Bisogna dimostrare che
   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad (|x - y| \leq \delta \text{ e } |x^2 - y^2| > \varepsilon).$$
   Si scelga $\varepsilon = 1/2$ e dato $\delta > 0$ si scelgano $x = \frac{1}{2\delta} + 1$ e $y = x - \delta$. Ovviamente $|x - y| = \delta \leq \delta$. Inoltre
   $$|x^2 - y^2| = |x^2 - x^2 + 2\delta x - \delta^2| = \delta(2x - 1) = 1 > \varepsilon.$$

3. *Mostrare che se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua e* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in [a, b]$*, allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > \delta$ *per ogni* $x \in [a, b]$*.*

   Per il teorema di Weierstraß la funzione f ha minimo in $[a, b]$ cioè esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Poniamo $\delta = f(x_0)/2$. Per ipotesi $f(x_0) > 0$ e quindi $\delta > 0$ inoltre per ogni $x \in [a, b]$ si ha $f(x) \geq f(x_0) = 2\delta > \delta$.

4. *Provare che l'equazione* $\cos t = t$ *(con* $t \in \mathbb{R}$*) ha soluzione. Dimostrare inoltre che la soluzione è unica.*

   Si consideri la funzione $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R} \quad f(t) = \cos t - t$. Questa funzione è continua in quanto somma di funzioni continue, e siccome $f(0) = 1$ e $f(\pi/2) = -\frac{\pi}{2}$ applicando il teorema degli zeri sappiamo che deve esistere $t_0 \in [0, \pi/2]$ tale che $f(t_0) = 0$ cioè tale che $\cos t_0 = t_0$.

   Mostriamo ora che la soluzione è unica. Nell'intervallo $[0, \pi/2]$ la funzione $\cos t$ è decrescente e anche $-t$ è decrescente, dunque la funzione f è decrescente e in tale intervallo può assumere un unico zero. Dunque per $t \in [0, \pi/2]$ c'è un'unica soluzione. Per $t > \pi/2$ non si possono avere soluzioni in quanto $\cos t \leq 1 < \pi/2 < t$. Analogamente se $t < -\pi/2$ si ha $\cos t \geq -1 > -\pi/2 > t$ e se $t \in]-\pi/2; 0]$ si ha $\cos t > 0 \geq t$ e quindi non ci sono altre soluzioni.