Soluzioni
11 dicembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Si consideri*
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Si provi che $\alpha \mapsto \log(\Gamma(\alpha))$, $\alpha > 0$, *è una funzione convessa.*

Soluzione.

• L'esercizio è facilmente risolubile usando la seguente **diseguaglianza di Hö lder**:
$$\int |f(t)|^\lambda |g(t)|^{1-\lambda}\,dt \ \le\ \Big(\int |f(t)|dt\Big)^\lambda \Big(\int |g(t)|dt\Big)^{1-\lambda}\ ,\quad \lambda\in[0;1].$$
Infatti la tesi è:
$$\log(\Gamma(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta))\ \le\ \lambda\log(\Gamma(\alpha))+(1-\lambda)\log(\Gamma(\beta))\ ,\quad \lambda\in[0;1]$$
cioé
$$\log\int_0^\infty t^{\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\ \le\ \log\Big(\Big(\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\Big)^\lambda\Big(\int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\Big)^{1-\lambda}\Big)$$
ovvero
$$\log\int_0^\infty e^{\lambda((\alpha-1)\log t-t)}e^{(1-\lambda)((\beta-1)\log t-t)}\,\mathrm{d}t\ \le$$
$$\log\Big(\Big(\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\Big)^\lambda\Big(\int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\Big)^{1-\lambda}\Big)$$
che segue direttamente dalla diseguaglianza di Hölder ponendo
$f(t) = e^{(\alpha-1)\log t-t}$ e $g(t) = e^{(\beta-1)\log t-t}$,
e quindi usando la non decrescenza del logaritmo.

• Per provare la diseguaglianza di Hölder si procede come segue. Si considera il caso in cui gli integrali dei moduli delle funzioni sono non nulli. Quindi dividendo per il secondo membro ci riduce al caso in cui gli integrali dei moduli delle funzioni sono eguali entrambi ad 1. Osservando che la funzione
$$I(\lambda) = \int |f|^\lambda |g|^{1-\lambda}dt = \int \Big|\frac{f}{g}\Big|^\lambda |g|dt$$
é convessa poichè i suoi rapporti incrementali sono gli integrali dei rapporti incrementali della funzione convessa $\lambda\mapsto|g||f/g|^\lambda$, e quindi per monotonia dell'integrale sono crescenti, ed osservando che $I(0) = I(1) = 1$, si ottiene
$$\int |f|^\lambda|g|^{1-\lambda}dt\ =\ I(\lambda)\ \le\ 1$$
che è quanto desiderato.

Nel caso in cui uno dei due integrali é nullo se il corrispettivo esponente è 0 la diseguaglianza è verificata in quanto eguaglianza. Altrimenti usando le somme di Riemann si prova che il primo membro della diseguaglianza è anch'esso nullo. Quest'ultimo passaggio è immediato se le funzioni sono continue, in quanto una funzione continua non negativa con integrale nullo è nulla ovunque.

2. *Si calcolino le primitive delle seguenti funzioni di variabile reale sui rispettivi domini massimali di definizione:*

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \quad , \quad \tan^2 x \quad , \quad \frac{a^x}{b^x}$$

$$\frac{\log(\log x)}{x\log x} \quad , \quad \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{1}{x^6+1}$$

Soluzione.

(a) La funzione $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ è definita per $0 < x < 2$, e si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{d}{dx}(c + \operatorname{arsin}(x-1)).$$

(b) Le funzione $\tan^2 x$ è definita su $\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}]-\pi/2+m\pi;\pi/2+m\pi[$.
Inoltre si ha per $x \in]-\pi/2+m\pi;\pi/2+m\pi[$

$$\tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1 = \frac{d}{dx}\big(\tan x - x + c_m\big)$$

(c) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ($a > 0$, $b > 0$), e si ha se $a \neq b$

$$\frac{a^x}{b^x} = e^{x\log\frac{a}{b}} = \frac{d}{dx}\big(c + \frac{1}{\log\frac{a}{b}}e^{x\log\frac{a}{b}}\big),$$

mentre se $a = b$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 = \frac{d}{dx}(x+c).$$

(d) La funzione è definita per $x > 1$, e si ha

$$\frac{\log(\log x)}{x\log x} = \frac{d}{dx}\big(c + \frac{1}{2}\big(\log(\log x)\big)^2\big).$$

(e) La funzione è definita su $]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$.
Con la sostituzione $\tau = 1/x$, $\tau \in]-1;0[\cup]0;1]$, si ha

$$\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\big(\frac{d\tau}{dx}\big)\sqrt{\frac{\frac{1}{\tau}-1}{\frac{1}{\tau}+1}} = -\big(\frac{d\tau}{dx}\big)\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}$$

quindi con l'usuale sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} = \sqrt{\frac{2}{1+\tau}-1}\ , \quad t \in [0;1[\cup]1;+\infty[$$

si ottiene $\tau = \frac{2}{t^2+1} - 1$, $\frac{dt}{d\tau} = -\frac{(t^2+1)^2}{4t}$ per cui

$$\big(\frac{d\tau}{dx}\big)\big(\frac{dt}{d\tau}\big)\frac{4t}{(t^2+1)^2}\cdot t = 2\big(\frac{d\tau}{dx}\big)\big(\frac{dt}{d\tau}\big)\frac{d}{dt}\big(\operatorname{artan} t - \frac{t}{t^2+1}\big)$$

concludendo

$$\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \begin{cases} \frac{d}{dx}2\big(\operatorname{artan} t - \frac{t}{t^2+1} + c\big) & x \in]-\infty;-1[\\ \\ \frac{d}{dx}2\big(\operatorname{artan} t - \frac{t}{t^2+1} + d\big) & x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

(f) La funzione è definita su tutto $\mathbf{R}$.
Osservando che $1+x^6=(1+x^2)(x^4-x^2+1)$, si ricava

$$\frac{1}{1+x^6}=\frac{1+x^2}{1+x^6}-\frac{x^2}{1+x^6}=\frac{1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}$$

quindi visto che ogni polinomio reale si puó scomporre in polinomi reali irriducibili di grado al piú eguale a due, non avendo x^4-x^2+1 radici reali esso si deve decomporre con due trinomi di secondo grado. Si ottiene $x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$. Per cui

$$\frac{1}{1+x^6}=\frac{ax+b}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{\alpha x+\beta}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}$$

e imponendo che la somma delle funzioni razionali con numeratore incognito sia il reciproco del nostro polinomio di quarto grado si ottiene $a=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $b=\beta=\frac{1}{2}$, per cui

$$\frac{1}{1+x^6}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}=$$

$$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}=$$

$$4\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{(2x-\sqrt{3})^2+1}+4\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{(2x+\sqrt{3})^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2x+\sqrt{3}}{(2x-\sqrt{3})^2+1}+\frac{1}{(2x-\sqrt{3})^2+1}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2x+\sqrt{3}}{(2x+\sqrt{3})^2+1}+\frac{1}{(2x+\sqrt{3})^2+1}+$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}=$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{(2x+\sqrt{3})^2+1}{(2x-\sqrt{3})^2+1}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\text{artan}\,(2x-\sqrt{3})\;+\;\frac{1}{2}\text{artan}\,(2x+\sqrt{3})\;+$$

$$\left.-\frac{1}{3}\text{artan}\,(1+x^3)\;+\;c\right)$$

3. *Si provi che, dati due numeri interi m ed n:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

Soluzione.Integrando per parti con $f'(x) = \sin mx$ e $g(x) = \sin nx$, si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx =$$

integrando ancora per parti con $f'(x) = \cos mx$ e $g(x) = \cos nx$, si ha:

$$= \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

per cui si ha $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx =$

$$\begin{cases} 0 & m \neq n \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)^2 dx = \frac{1}{m} \int_{-m\pi}^{m\pi} (\sin y)^2 dy = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin y)^2 dy = \pi & m = n \end{cases}$$

Infine $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$ poiché l'integranda é una funzione dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine.

4. *Si provi che, date due funzioni definite in $[0, +\infty)$ e derivabili in $(0, +\infty)$*

$$\text{se} \quad f(0) \geq g(0) \quad \& \quad f'(x) \geq g'(x) \quad \text{allora} \quad f(x) \geq g(x) \ , \quad x \geq 0$$

Soluzione.

Si applica il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) - g(x)$, ottenendo che per ogni $x \in]0; +\infty[$ vi è $\xi \in]0; x[$ per cui:

$$f(x) - g(x) \geq f(x) - g(x) - (f(0) - g(0)) = x\Big(f'(\xi) - g'(\xi)\Big) \geq 0.$$