

Soluzioni degli esercizi
proposti il 23 ottobre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. Trovare $\sup A$ e $\inf A$ per i seguenti insiemi.

(a) $A = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in]0, 1[\right\}$. Poiché $(x - y)^2 \geq 0$ si ha $2xy \leq x^2 + y^2$ e quindi $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. Se $x = y$ allora $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ e quindi l'estremo superiore è valore massimo, è uguale a $1/2$ ed è assunto per tutti gli x, y per cui $x = y$. Fissato y si ha $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq x \frac{1}{y}$ e scelto $0 < \bar{x} < \varepsilon y$ si ha $0 < \frac{\bar{x}y}{x^2+y^2} < \varepsilon$. Quindi l'estremo inferiore è il valore 0 e non è mai assunto.

(b) $A = \left\{ \frac{nm}{n^2+m^2} : n, m \in \mathbf{N}, n^2 + m^2 \neq 0 \right\}$. Come nel caso precedente l'estremo superiore è valore massimo ed è uguale ad $1/2$. Poiché $\frac{nm}{n^2+m^2} \geq 0$ e per $n = 0, m = 1$ si ha $\frac{nm}{n^2+m^2} = 0$, l'estremo inferiore è valore minimo uguale a 0, ed è assunto se $n = 0$ oppure se $m = 0$.

(c) $A = \left\{ \frac{m-2}{3n} : n, m \in \mathbf{N}, n \geq 1 \right\}$. Per $n = 1$ si ha $\frac{m-2}{3n} = \frac{m-2}{3}$ e per $m = 3N + 2$ si trova $\frac{m-2}{3n} = N$. Dunque l'estremo superiore è $+\infty$. Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $m \geq 0$ si ha $\frac{m-2}{3n} \geq \frac{-2}{3n} \geq -\frac{2}{3}$ e si ha l'eguaglianza se $n = 1$ e $m = 0$. Dunque l'estremo inferiore è valore minimo uguale a $-\frac{2}{3}$, assunto per $m = 0$ e $n = 1$.

(d) $A = \left\{ \frac{xy}{x+y} : x, y \in]0, 1[\right\}$. Cambiando variabile e ponendo $S = x + y$ il problema è equivalente a trovare l'estremo superiore di $\frac{x(S-x)}{S}$ al variare di $x \in]0, 1[$, $S \in]0, 1 + x[$: $\frac{x(S-x)}{S} = x - \frac{x^2}{S} = \frac{S}{4} - \left(\frac{x}{\sqrt{S}} - \frac{\sqrt{S}}{2} \right)^2$, fissato S assume valore massimo per $x = S/2$ e il massimo è $S/4$. Per $S \in]0, 2[$ $S/4 < 1/2$, d'altronde per $S = 2 - \varepsilon$ (con ad esempio $x = 1 - \varepsilon/2$) si trova $S/4 = \frac{2-\varepsilon}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$, quindi l'estremo superiore è $1/2$. Un metodo alternativo è considerare $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} < 1/2$, e procedere quindi ponendo $x = y = 1 - \varepsilon$.

L'estremo inferiore di $\frac{xy}{x+y}$ è 0, infatti $0 < \frac{xy}{x+y} \leq \frac{xy}{y} = x \in]0, 1[$.

(e) $A = \left\{ \frac{mn}{m+n} : m, n \in \mathbf{N}, m + n \geq 1 \right\}$. Per $m = n$ si ha $\frac{mn}{m+n} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$. Per $m = 2N$ si ottiene $\frac{mn}{m+n} = N$, quindi l'estremo superiore è $+\infty$. L'estremo inferiore è minimo ed è il valore 0, assunto per $m = 0$ oppure per $n = 0$.

(f) $A = \{ |x| : x^2 + x < 2 \}$. $\{ x \in \mathbf{R} : x^2 + x < 2 \} = \{ x \in \mathbf{R} : x^2 + x - 2 < 0 \} = \{ x \in \mathbf{R} : (x+2)(x-1) < 0 \} =]-2; 1[$. Essendo $|x| \geq 0$ l'estremo inferiore è il valore minimo 0 assunto per $x = 0 \in]-2; 1[$. L'estremo superiore è il valore -2 , infatti per $x = -2 + \varepsilon \in]-2; 1[$ si ha $|x| = |-2 + \varepsilon| = 2 - \varepsilon$ e per ogni $x \in]-2; 1[$ si ha $|x| < 2$.

2. Dati $a_1 \neq a_2$, trovare il più grande y tale che $|x - a_1| + |x - a_2| \geq y$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Si tratta di trovare l'estremo inferiore di $\{ |x - a_1| + |x - a_2| : x \in \mathbf{R} \}$ dati $a_1 < a_2$. Per la disuguaglianza triangolare $|a_1 - a_2| = |(a_1 - x) - (a_2 - x)| \leq |x - a_1| + |x - a_2|$. D'altronde se $x \in [a_1; a_2]$ allora $|x - a_1| + |x - a_2| = a_2 - a_1 = |a_1 - a_2|$. Quindi tale estremo inferiore è valore minimo pari a $a_2 - a_1$, ed è assunto per $x \in [a_1; a_2]$.

3. Generalizzare l'esercizio precedente a n punti a_1, \dots, a_n .

Si tratta di trovare l'estremo inferiore di $\{|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n| : x \in \mathbf{R}\}$, dati $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Conviene dividere la discussione in due casi:

- $n = 2N$ (n pari). Qualunque sia $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} & (a_{2N} - a_1) + (a_{2N-1} - a_2) + \dots + (a_{N+1} - a_N) \\ &= (a_{2N} - x) + (x - a_1) + \dots + (a_{N+1} - x) + (x - a_N) \\ &\leq |x - a_{2N}| + |x - a_1| + \dots + |x - a_{N+1}| + |x - a_N|. \end{aligned}$$

D'altronde se $x \in [a_N; a_{N+1}]$ la precedente risulta essere una uguaglianza e quindi l'estremo inferiore è il valore minimo

$$a_{2N} - a_1 + a_{2N-1} - a_2 + \dots + a_{N+1} - a_N.$$

- $n = 2N + 1$ (n dispari). È del tutto analogo al precedente:

$$\begin{aligned} & (a_{2N} - a_1) + (a_{2N-1} - a_2) + \dots + (a_{N+2} - a_N) \\ &= (a_{2N} - x) + (x - a_1) + \dots + (a_{N+2} - x) + (x - a_N) \\ &\leq |x - a_{2N}| + |x - a_1| + \dots + |x - a_{N+2}| + |x - a_N| \\ &\leq |x - a_{2N}| + |x - a_1| + \dots + |x - a_{N+2}| + |x - a_N| + |x - a_{N+1}|. \end{aligned}$$

Stavolta si ha l'uguaglianza solo quando $x = a_{N+1}$. Dunque l'estremo inferiore è

$$a_{2N} - a_1 + a_{2N-1} - a_2 + \dots + a_{N+1} - a_N.$$

che è valore minimo assunto per l'appunto per $x = a_{N+1}$.

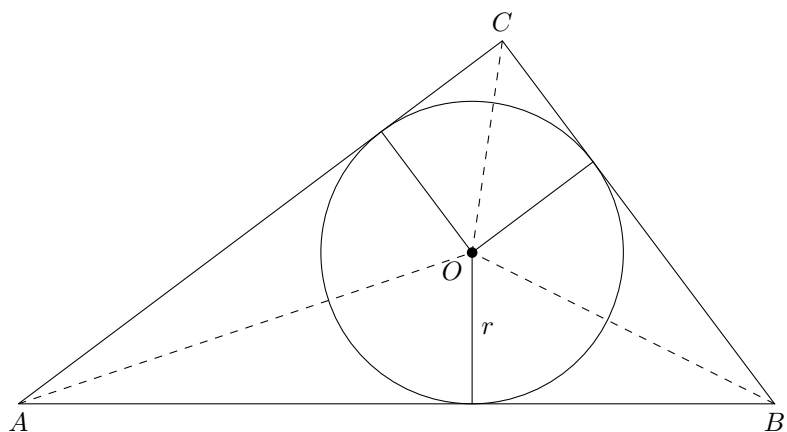
4. Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tre vettori di lunghezza 1 applicati nello stesso punto e in equilibrio, cioè $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$. Mostrare che i tre vettori formano angoli uguali fra loro.

Poiché $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$ i tre vettori sono planari. Sia O il loro punto di applicazione, e P_1, P_2 i punti tali che $\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OP_2} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, quindi $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{e}_2$ applicato in P_1 ed infine $\overrightarrow{P_2O} = \mathbf{e}_3$ applicato in P_2 , poiché $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2O} = \overrightarrow{OO} = 0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Quindi il triangolo di vertici O, P_1, P_2 ha lati uguali per ipotesi, quindi ha angoli uguali, quindi angoli esterni uguali. Ma questi ultimi sono gli angoli tra i tre vettori applicati in O , essendo i vettori paralleli ai lati.

Soluzione alternativa. Si fissi un sistema di riferimento ortonormale nel piano determinato dai tre vettori, e centro il loro comune punto di applicazione O . Se $v = (a; b), w = (\alpha; \beta)$ in tale riferimento ortonormale si ha che $\sqrt{a^2 + b^2} = |v|$ è la lunghezza di v . Per definizione $(v|w) = a\alpha + b\beta = |v| \cdot |w| \cos \widehat{vOw}$ quindi $(v|v) = |v|^2, (v|w) = (w|v)$. Inoltre $(\lambda v + w|\nu) = \lambda(v|\nu) + (w|\nu)$. Poiché $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$, moltiplicando tale relazione per $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1) &= -(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1) = -|\mathbf{e}_1|^2 = -1 \\ (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2) &= -1 \\ (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3) &= -1 \end{aligned}$$

Dunque otteniamo $(\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3)$ e $(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3)$ quindi $(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2)$. Essendo $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$ si ha $\cos \widehat{\mathbf{e}_1O\mathbf{e}_3} = \cos \widehat{\mathbf{e}_2O\mathbf{e}_3} = \cos \widehat{\mathbf{e}_2O\mathbf{e}_1}$. Sapendo inoltre che $(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2) = \cos \widehat{\mathbf{e}_1O\mathbf{e}_2} + \cos \widehat{\mathbf{e}_2O\mathbf{e}_3} = -1$, si ha $\cos \widehat{\mathbf{e}_1O\mathbf{e}_3} = \cos \widehat{\mathbf{e}_2O\mathbf{e}_3} = \cos \widehat{\mathbf{e}_1O\mathbf{e}_2} = -\frac{1}{2}$. Dunque gli angoli convessi tra i tre vettori sono di 120° .



5. *Mostrare che il raggio del cerchio inscritto ad un triangolo è S/p dove S è l'area del triangolo e p il semiperimetro.*

$$S = \frac{|AB| \cdot r}{2} + \frac{|BC| \cdot r}{2} + \frac{|CA| \cdot r}{2} = p \cdot r.$$