Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome ______ **Nome** ______
Matricola ______ **Corso di studio** ______ **Anno iscrizione** ______

1. **(punti 4)** Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -5 & 3k \\ 2 & -2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

(a) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.

(b) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.

(c) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e z può essere scelto come parametro.

(d) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.

L'affermazione esatta è ☐

Dimostrazione:

2. **(punti 4)** Sia A una matrice 3×3 con $\mathrm{car} A = 1$ e tale che $\lambda = 1$ è un suo autovalore. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

(a) La matrice A è sempre diagonalizzabile.

(b) $\dim \mathrm{Ker} A = 1$.

(c) $\mathrm{tr} A = 2$.

(d) $\mathrm{car} A^2 = 0$.

L'affermazione esatta è $\boxed{}$
Dimostrazione:

3. **(punti 7)** Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono: $\boxed{}$
   (b) L'equazione caratteristica di A è: $\boxed{}$
   (c) Gli autovalori di A sono: $\boxed{}$
   (d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t: $\boxed{}$
   (e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t: $\boxed{}$

4. **(punti 2)** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

   (a) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

(b) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.

(c) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.

(d) V_3 non è un sottospazio.

L'affermazione corretta è $\boxed{}$

Dimostrazione:

5. **(punti 7)** Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(4z + \pi i) - 2ei\exp(2z + \frac{\pi}{2}i) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. **(punti 2)** Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 16$$

(a) Sono tutte reali.

(b) Sono tutte non reali.

(c) Sono o reali o immaginarie pure

(d) sono due complesse coniugate ed una doppia reale

La risposta giusta è $\boxed{}$

7. **(punti 2)** Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

(a) Le rette si incontrano.

(b) Esiste un piano che contiene le due rette.

(c) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.

(d) La distanza tra r ed s è 4.

La risposta esatta è $\boxed{}$

Dimostrazione:

8. **(punti 6)**

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (1, 1, 1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

(b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z - 18 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 3\sqrt{3}$

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome [ ] **Nome** [ ]
Matricola [ ] **Corso di studio** [ ] **Anno iscrizione** [ ]

1. **(punti 4)** Sia A una matrice 3×3 con $\dim \ker A = 2$ e con un autovalore non nullo. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

   (a) $\dim \mathrm{Im} A = 2$.

   (b) La matrice A non è triangolabile.

   (c) La matrice A è diagonalizzabile.

   (d) $A^2 = 0$.

   L'affermazione esatta è [ ]
   Dimostrazione:

2. **(punti 4)** Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & k-2 \\ 2 & 2 & 2k-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

   (a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.

   (b) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.

   (c) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.

   (d) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e z può essere scelto come parametro.

L'affermazione esatta è $\square$
Dimostrazione:

3. **(punti 2)** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l \\ m & 0 \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

(a) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.

(b) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

(c) V_3 non è un sottospazio.

(d) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.

L'affermazione corretta è $\square$
Dimostrazione:

4. **(punti 7)** Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono:
   (b) L'equazione caratteristica di A è:
   (c) Gli autovalori di A sono:
   (d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t:
   (e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t:

5. **(punti 7)** Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(-4iz + \pi i) - 2ei\exp(-2iz + \frac{\pi}{2}i) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. **(punti 2)** Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 81$$

   (a) Sono tutte non reali.
   (b) Sono tutte reali.
   (c) sono due complesse coniugate ed una doppia reale

(d) Sono o reali o immaginarie pure

La risposta giusta è $\boxed{}$

7. **(punti 2)** Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}$$

(a) Esiste un piano che contiene le due rette.

(b) Le rette si incontrano.

(c) La distanza tra r ed s è 3.

(d) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.

La risposta esatta è $\boxed{}$

Dimostrazione:

8. **(punti 6)**

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (-1, -1, -1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

(b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z + 18 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 3\sqrt{3}$

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome ______ **Nome** ______
Matricola ______ **Corso di studio** ______ **Anno iscrizione** ______

1. **(punti 7)** Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t & 1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono: ______

   (b) L'equazione caratteristica di A è:
   ______

   (c) Gli autovalori di A sono: ______

   (d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t: ______

   (e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t: ______

2. **(punti 2)** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

   Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

   (a) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.

   (b) V_3 non è un sottospazio.

   (c) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

   (d) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.

L'affermazione corretta è $\square$
Dimostrazione:

3. **(punti 4)** Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & k-1 \\ 1 & 4 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

(a) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e z può essere scelto come parametro.

(b) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.

(c) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.

(d) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.

L'affermazione esatta è $\square$
Dimostrazione:

4. **(punti 4)** Sia A una matrice 3×3 con car$A = 1$ e tale che $\lambda = 1$ è un suo autovalore. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

   (a) tr$A = 2$.

   (b) car$A^2 = 0$.

   (c) La matrice A è sempre diagonalizzabile.

   (d) $\dim \mathrm{Ker} A = 1$.

   L'affermazione esatta è $\boxed{}$

   Dimostrazione:

5. **(punti 7)** Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(-4z - \pi i) + 2ei \exp(-2z - \frac{\pi}{2} i) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

   Le soluzioni sono:

6. **(punti 2)** Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 16i$$

   (a) Sono o reali o immaginarie pure

   (b) sono due complesse coniugate ed una doppia reale

   (c) Sono tutte reali.

   (d) Sono tutte non reali.

   La risposta giusta è $\boxed{}$

7. **(punti 2)** Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 5 \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 \\ y = -2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

(a) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.

(b) La distanza tra r ed s è 6.

(c) Le rette si incontrano.

(d) Esiste un piano che contiene le due rette.

La risposta esatta è $\boxed{}$

Dimostrazione:

8. **(punti 6)**

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (1, 1, 1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

(b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z + 15 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 4\sqrt{3}$

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome ______ **Nome** ______

Matricola ______ **Corso di studio** ______ **Anno iscrizione** ______

1. **(punti 2)** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l \\ m & 0 \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

(a) V_3 non è un sottospazio.

(b) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.

(c) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.

(d) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

L'affermazione corretta è ☐

Dimostrazione:

2. **(punti 7)** Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono: $\boxed{}$

(b) L'equazione caratteristica di A è:

$\boxed{}$

(c) Gli autovalori di A sono: $\boxed{}$

(d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t: $\boxed{}$

(e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t: $\boxed{}$

3. **(punti 4)** Sia A una matrice 3×3 con $\dim \ker A = 2$ e con un autovalore non nullo. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

   (a) La matrice A è diagonalizzabile.

   (b) $A^2 = 0$.

   (c) $\dim \mathrm{Im} A = 2$.

   (d) La matrice A non è triangolabile.

   L'affermazione esatta è $\boxed{}$

   Dimostrazione:

4. **(punti 4)** Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & k+3 & 0 \\ 1 & k+3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

   (a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.

(b) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e y può essere scelto come parametro.

(c) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.

(d) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.

L'affermazione esatta è $\square$

Dimostrazione:

5. **(punti 7)** Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(4iz - \pi) + 2ei\exp(2iz - \frac{\pi}{2}) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. **(punti 2)** Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 81i$$

(a) sono due complesse coniugate ed una doppia reale

(b) Sono o reali o immaginarie pure

(c) Sono tutte non reali.

(d) Sono tutte reali.

La risposta giusta è $\square$

7. **(punti 2)** Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -4 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

(a) La distanza tra r ed s è 5.

(b) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.

(c) Esiste un piano che contiene le due rette.

(d) Le rette si incontrano.

La risposta esatta è $\boxed{}$

Dimostrazione:

8. **(punti 6)**

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (-1,-1,-1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0,0,0)$ passante per P

(b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z - 15 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 4\sqrt{3}$