

Appendice: Il teorema di Baire su \mathbb{R}

Notazioni: se $A \subset \mathbb{R}$ si definisce la parte interna di A $int(A) = \{x \in A : \exists \delta > 0 (\forall y \in \mathbb{R} (|y - x| < \delta \Rightarrow y \in A))\}$, il complementare di A in \mathbb{R} $-A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$ e la chiusura di A , $\bar{A} = \overline{int(-A)}$.

Se $x, \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$, $B(x, \delta)$ indica la palla di centro x e raggio delta, ossia $]x - \delta, x + \delta[$.

Se $\{A_i\}_{i \in I}$ e' una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R} si pone

$$\bigcup_i A_i = \{x \in \mathbb{R} : \exists i \in I (x \in A_i)\} \quad \text{e} \quad \bigcap_i A_i = \{x \in \mathbb{R} : \forall i \in I (x \in A_i)\}.$$

Esercizio 1 *Provare che $\bar{\bar{A}} = \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta \in \mathbb{R}^+ (B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset)\}$ e che $int(A) = -(\overline{-A})$*

Esercizio 2 *Provare che $int(A)$ e' l'aperto piu' grande contenuto in A . Provare che \bar{A} e' il chiuso piu' piccolo che contiene A .*

Esercizio 3 *Provare che A e' denso in \mathbb{R} se e solo se $int(-A) = \emptyset$.*

Esercizio 4 *Provare che $\bigcup_i A_i = -(\bigcap_i (-A_i))$ e che $\bigcap_i A_i = -(\bigcup_i (-A_i))$.*

E quando dico provare intendo provare!

Teorema 5 (Baire per \mathbb{R}) *Sia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia di aperti densi in \mathbb{R} . Allora $\bigcap_i A_i$ e' denso in \mathbb{R} .*

Teorema 6 *Sia $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia di chiusi con parte interna vuota in \mathbb{R} . Allora $\bigcup_i C_i$ ha parte interna vuota in \mathbb{R} .*

Esercizio 7 *Dimostrare che il Teorema 5 vale se e solo se vale il Teorema 6.*

Esercizio 8 *Dimostrare che A e' denso in \mathbb{R} se e solo se per ogni intervallo aperto non vuoto J si ha $A \cap J \neq \emptyset$.*

Teorema 9 *Sia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia di aperti densi in \mathbb{R} . Allora per ogni intervallo aperto non vuoto J si ha $\bigcap_i A_i \cap J \neq \emptyset$.*

Esercizio 10 *Dimostrare che il Teorema 5 vale se e solo se vale il Teorema 9.*

Dimostrazione del Teorema 9:

Sia I un intervallo aperto non vuoto,

Esercizio 11 *Dimostrare che esiste una famiglia di punti $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $x_i \in \mathbb{R}$, e una famiglia di raggi $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $0 < r_i < \frac{1}{2^i}$, tali che $B(x_i, r_i) \subset I \cap A_1 \cap \dots \cap A_i$ e $\overline{B(x_{i+1}, r_{i+1})} \subset B(x_i, r_i)$.*

Esercizio 12 *Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} (n > m \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon))$.*

Esercizio 13 *Dimostrare che $x \in I \cap A_1$.*

Esercizio 14 *Dimostrare che $x \in I \cap (\bigcap_i A_i)$.*

Ne segue che $I \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$. Dalla arbitrarietà dell'intervallo I segue la tesi.

Il Teorema 9 e' così' dimostrato, e quindi anche il 5 e il 6.

Esercizio 15 *Provare che un insieme numerabile e denso in \mathbb{R} non può essere ottenuto come intersezione numerabile di aperti.*

Definizione: sia $\varepsilon > 0$. Una $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice ε -continua in x se $\exists \delta > 0$ tale che $y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$

Esercizio 16 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia C l'insieme dei punti in cui f e' continua. Provare che C e' intersezione numerabile di aperti. (ε -suggerimento: guardare come sono fatti i punti $\frac{1}{2^n}$ -continuita').*

Esercizio 17 *Provare che non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $C = \mathbb{Q}$.*