

Dicembre 99

1. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile su ogni intervallo compatto e si definisca $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$g(t) = \int_{1/t^2}^{1/t} f(st) ds.$$

- (a) Nel caso in cui f sia continua si calcoli la funzione derivata di g .
(b) Si calcoli il

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$$

- (c) Se vale $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = l \in \mathbb{R}$ si calcoli (se esiste) il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^2 g(t).$$

2. Siano date due funzioni $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue sul loro dominio e derivabili su $(0, +\infty)$.

- (a) Se valgono le condizioni

$$f(0) = g(0) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) - g(t)| = 0$$

stabilire se esiste un punto $\xi \in (0, +\infty)$ tale che $f'(\xi) = g'(\xi)$.

- (b) Se $f(0) = 0$ ed è dato $\alpha > 0$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\alpha x} = 1$$

Stabilire la veridicità delle seguenti affermazioni motivandone la risposta

- (b1) Esiste un punto $\xi \in (0, +\infty)$ tale che $f'(\xi) = \alpha$,
(b2) $|f(x) - \alpha x| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$,
(b3) $f'(x) \rightarrow \alpha$ per $x \rightarrow +\infty$.

3. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che esista $M > 0$ con $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si definisca la funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\infty < a < b < +\infty$, tale che $g(x) = f'(x)$. Si assuma che g sia Riemann integrabile e che abbia massimo e minimo sull'intervallo $[a, b]$. Stabilire se vale il teorema della media integrale per la funzione g sull'intervallo $[a, b]$.
4. Sia data una funzione $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$. Se esistono due numeri $\alpha < \beta$ e $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{f(x)}{x} > \beta \quad \text{e} \quad \frac{f(y)}{y} < \alpha$$

Si può concludere che $f'((-\infty, 0)) \supset [\alpha, \beta]$?