24 novembre 1999

1. Notazione: se I è un insieme (insieme degli indici), X è un insieme (insieme ambiente), e per ogni $i \in I$ è dato un insieme $A_i \subset X$ allora si definisce l'unione degli A_i come:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \colon \exists i \in I \colon x \in A_i\}.$$

   (a) Si dia una definizione analoga per l'intersezione $\bigcap_{i\in I} A_i$ e si verifichi che vale la formula
   $$X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i).$$

   (b) Sia I l'insieme degli interi positivi e definiamo, per $n \in I$,
   $$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \quad B_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[, \quad C_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \quad D_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[.$$
   Si determinino:
   $$\bigcup_{n\in I} A_n, \quad \bigcup_{n\in I} B_n, \quad \bigcup_{n\in I} C_n, \quad \bigcup_{n\in I} D_n.$$

2. Notazione:
$$\inf_{x\in A} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\} = \inf f(A).$$
Sia $I =]0, +\infty[$. Si determinino i seguenti valori:
$$\sup_{x\in I} \sup_{y\in I} \arctan \frac{y}{x}; \quad \sup_{x\in I} \inf_{y\in I} \arctan \frac{y}{x};$$
$$\inf_{y\in I} \sup_{x\in I} \arctan \frac{y}{x}; \quad \inf_{x\in I} \inf_{y\in I} \arctan \frac{y}{x}.$$

3. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata (cioé tale che esiste $M > 0$ per cui $|g(x)| < M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Dimostrare che la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xg(x)$ è continua in 0.

4. Dire, nei seguenti casi, se vi sono funzioni con la proprietà specificata. In caso affermativo si trovi un esempio, in caso negativo si provi quanto asserito:
   (a) $f \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ continua, surgettiva;
   (b) $f \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ continua, iniettiva;
   (c) $f \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ continua, bigettiva;
   (d) $f \colon \mathbb{R} \to]0, 1[$ continua, bigettiva;
   (e) $f \colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ continua, surgettiva;
   (f) $f \colon]0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, surgettiva;
   (g) $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, surgettiva;
   (h) $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ bigettiva.

5. Sia C un sottoinsieme del piano cartesiano, e sia $p(t)$ il punto del piano di coordinate $(t, 0)$. Consideriamo la funzione $f_C \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(t) = \operatorname{dist}(p(t), C) = \inf_{q\in C} d(p(t), q) = \inf_{(x,y)\in C} \sqrt{(x-t)^2 + y^2}.$$

(a) Si provi che la funzione f_C è continua.

(b) Supponiamo ora che $\mathrm{dist}(0, C) < 1$. Si provi che in questo caso f_C ammette minimo.

(c) Si trovi un insieme C per cui f_C non ammette minimo.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Provare che f è monotona.