

## 15 dicembre 1999

1. Sia  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una funzione continua. Provare che esiste  $x \in [0, 1]$  tale che  $f(x) = x$ .

2. Si consideri l'equazione integrale

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x). \quad (*)$$

(a) Si trovino tutte le funzioni  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  che verificano (\*).

(b) Si provi che se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica (\*) allora  $f$  è differenziabile infinite volte su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(c) Si trovino tutte le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che verificano (\*).

3. Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *pari* se  $f(x) = f(-x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si dice invece *dispari* se  $f(x) = -f(-x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Siano  $f$  e  $g$  funzioni pari. Si dica (quando possibile) se le funzioni

$$(f(x))^n \quad f(x)g(x) \quad f(g(x)) \quad f(x)+g(x) \quad f'(x) \quad \int_0^x f(t) dt$$

sono pari o dispari. Si faccia lo stesso per  $f$  e  $g$  dispari, per  $f$  pari e  $g$  dispari e infine per  $f$  dispari e  $g$  pari.

(b) Si calcoli

$$\int_{\log(0.5)}^{\log(2)} \frac{\sin x \sqrt{\frac{\sin^2(\cos x) + \pi e^{(x^4)}}{1 + (xe^{\cos x} \sin x)^2}} + 2 \sin(x^2 + 2) \arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)}{1 + e^{-\frac{x^2}{2}} + x^7 \sin(-\pi x) + \frac{12}{11} |x|^{2\pi+1}} dx.$$

(c) Sia  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{C}^1$  tale che

$$\begin{cases} u'(x) = e^{\cos x} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Si provi che

$$\int_{-1}^1 u(x) dx = 2.$$

4. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa.

(a) Provare che  $f$  non può avere esattamente 3 zeri.

(b) Provare che se  $f$  ha esattamente due zeri allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

(Suggerimento. Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione convessa ( $I \subset \mathbb{R}$ ), allora per ogni  $x_0 \in I$  esiste  $m \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$ ).

5. Sia  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{C}^2$  tale che

$$\begin{cases} u''(x) = \frac{1}{1 + e^{u(x)}} \\ u'(0) = 1 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Si provi che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$$

6. Sia  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^1$ . Provare che

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq (f(0) - f(1))^2$$

e che se vale l'uguaglianza allora  $f$  è lineare (cioè  $f(t) = at + b$  per qualche  $a, b \in \mathbb{R}$ ).