

## Ancora limiti e derivate in più variabili

11 ottobre 2001

1. Si provi che la funzione  $f: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^5}{|x|}$$

non ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

2. Si consideri la funzione  $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^{|y|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$$

e che non esiste il limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

3. Si consideri la funzione  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\chi_{\mathbf{Q}}(x)$$

dove  $\chi_{\mathbf{Q}}(x)$  è la funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali. Verificare che

- (a)  $f$  è continua e differenziabile nel punto  $(0, 0)$ ;
  - (b) per ogni  $x \in \mathbf{R}$  esiste il  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ;
  - (c) esiste il  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ;
  - (d) per  $y \neq 0$  non esiste il  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ .
4. Sia  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua nel punto  $(0, 0)$ . Supponiamo inoltre che per ogni  $x$  esista il limite  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  e che per ogni  $y$  esista il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ . Dimostrare allora che i seguenti limiti esistono e vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0).$$