Analisi Matematica Due
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

19 novembre 2001

1. (a) Provare che la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Provare che la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^2$.

Soluzione.

(a) Per $x \neq 0$ la funzione f è derivabile e si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy\log|x| + xy \\ f_y(x,y) &= x^2 \log|x|. \end{aligned}$$

Se $x = 0$ calcoliamo le derivate (verificando anche che esistono) mediante il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} hy\log|h| = 0; \\ f_y(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora dimostrare che le derivate parziali f_x e f_y sono continue su tutto $\mathbf{R}^2$. Se $x \neq 0$ tali derivate parziali sono continue in (x,y) in quanto composizione di funzioni continue. Verifichiamo quindi che le derivate parziali sono continue anche nei punti $(0,\bar{y})$ stimando gli incrementi di f_x e f_y in tale punto. Dato un punto qualunque (x,y) poniamo $r = \sqrt{x^2 + (y-\bar{y})^2}$ e notiamo che per $r \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}
|f_x(x,y) - f_x(0,\bar{y})| &= |2xy \log|x|| \leq |2ry \log r| \to 0, \\
|f_y(x,y) - f_y(0,\bar{y})| &= x^2 \log|x| \leq r^2 \log r \to 0
\end{aligned}$$

(ad essere precisi l'uguaglianza nella seconda stima ha senso solo quando $x \neq 0$, ma per $x = 0$ la quantità da stimare è di per sè nulla). Dunque $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ sono funzioni continue per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ cioè f è di classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Se $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo calcolare facilmente le derivate prime e seconde di f:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2xy \log(x^2+y^2) + \frac{2x^3y}{x^2+y^2}, \\
f_y(x,y) &= x^2 \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}, \\
f_{xx}(x,y) &= 2y \log(x^2+y^2) + \frac{4x^2y}{x^2+y^2} + \frac{6x^2(x^2+y^2) - 4x^4y}{(x^2+y^2)^2}, \\
f_{xy}(x,y) &= 2x \log(x^2+y^2) + \frac{4xy^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^3(x^2+y^2) - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{2x^2y}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y(x^2+y^2) - 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Notiamo anche che (sempre se $(x,y) \neq (0,0)$) si ha $f_{xy} = f_{yx}$ in quanto se $x^2+y^2 \neq 0$ la funzione f è composizione di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ e quindi le derivate seconde sono necessariamente continue.

Se invece $(x,y) = (0,0)$ dobbiamo calcolare le derivate prime e seconde tramite il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\
f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\
f_{xx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\
f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\
f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \log h^2}{h} = 0, \\
f_{yy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0,h) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Non resta ora che verificare la continuità delle derivate seconde nel punto $(0,0)$. Posto $r = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha, per $r \to 0$,

$$
\begin{aligned}
|f_{xx}(x,y) - f_{xx}(0,0)| &\leq 2r\log(r^2) + \frac{4r^3}{2r^2} + \frac{12r^5+4r^5}{4r^4} \to 0, \\
|f_{xy}(x,y) - f_{xy}(0,0)| &= |f_{yx}(x,y) - f_{yx}(0,0)| \\
&\leq 2r\log(r^2) + \frac{4r^3}{2r^2} + \frac{4r^5+4r^5}{4r^4} \to 0, \\
|f_{yy}(x,y) - f_{yy}(0,0)| &\leq \frac{2r^3}{2r^2} + \frac{r^5+4r^5}{4r^4} \to 0.
\end{aligned}
$$

Dunque le derivate parziali seconde sono continue e quindi f è di classe $\mathcal{C}^2$.

2. Data $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2x^4 + 3x^2y - 2y$$

   (a) determinare i punti critici di f e stabilire se sono massimi o minimi relativi;

   (b) trovare il valore massimo e il valore minimo assunto da f sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq 1\}$;

   (c) trovare l'insieme $f(\mathbf{R}^2)$ di tutti i valori assunti da f su $\mathbf{R}^2$.

   Soluzione.

   (a) I punti critici di f devono risolvere il seguente sistema

$$
\begin{cases}
f_x(x,y) = 8x^3 + 6xy = 0 \\
\\
f_y(x,y) = 3x^2 - 2 = 0
\end{cases}
$$

   da cui si ottiene $x = \pm\sqrt{2/3}$ e $y = -8/9$. Si hanno quindi due punti critici: $(\sqrt{2/3}, -8/9)$, $(-\sqrt{2/3}, -8/9)$. Calcoliamo ora le derivate seconde di f:

$$
D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 + 6y & 6x \\ \\ 6x & 0 \end{pmatrix}.
$$

   Il determinante Hessiano risulta quindi $\det D^2f(x,y) = -36x^2$ e nei punti critici tale determinante vale $-24 < 0$. I punti critici non sono dunque nè massimi nè minimi relativi.

   (b) I valori massimo e minimo di f sull'insieme $A = \{x^2 \leq y \leq 1\}$ (il teorema di Weierstraß ci assicura che f ammette massimo e minimo su A) non possono essere assunti all'interno di A in quanto non ci sono punti critici di f in A, dunque massimo e minimo vanno cercati sul bordo di A. Dividiamo il bordo di A in due parti: $y = 1$ e $y = x^2$.

Per la parte di bordo in cui $y = 1$ possiamo considerare la funzione ausiliaria $g(x) = f(x, 1)$ di cui cerchiamo i valori massimo e minimo per $x \in [-1, 1]$. Si ha $g'(x) = f_x(x, 1) = 8x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3)$ e quindi $g'(x) = 0$ soltanto se $x = 0$. Il valore assunto nel punto critico di g è $g(0) = f(0, 1) = -2$. Per quanto riguarda la curva $y = x^2$ possiamo considerare la funzione ausiliaria $g(x) = f(x, x^2)$ con $x \in [-1, 1]$. Si ha $g'(x) = f_x(x, x^2) + 2xf_y(x, x^2) = 8x^3 + 6x^3 + 2x(3x^2 - 2) = 20x^3 - 4x$ che si annulla per $x = 0$ oppure per $x^2 = 1/5$. Entrambi i punti sono ammissibili e i valori assunti sono $g(0) = f(0, 0) = 0$, $g(\pm\sqrt{1/5}) = f(\pm\sqrt{1/5}, 1/5) = 2/25 + 3/25 - 2/5 = -1/5$. Dobbiamo anche tenere in considerazione gli estremi delle due parametrizzazioni: $f(\pm 1, 1) = 3$.

Riassumendo il valore massimo assunto da f su A è 3 mentre il valore minimo è -2.

(c) Notiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x, 0) = \lim_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty$ mentre vale $\lim_{y\to+\infty} f(0, y) = \lim_{y\to+\infty} -2y = -\infty$. Dunque $\sup f(\mathbf{R}^2) = +\infty$ e $\inf f(\mathbf{R}^2) = -\infty$. Per il teorema dei valori intermedi (essendo $\mathbf{R}^2$ connesso e f continua) tutti i valori compresi tra $\sup f$ e $\inf f$ sono assunti e quindi $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$.

3. Sia $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile tale che

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ \\ f^2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Provare che $f = 0$.

Soluzione. Calcoliamo le derivate seconde miste di f:

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= D_y f_x(x, y) = D_y f(x, y) = f_y(x, y) = f^2(x, y) \\ f_{yx}(x, y) &= D_x f_y(x, y) = D_x f^2(x, y) = 2f(x, y) f_x(x, y) = 2f^2(x, y). \end{aligned}$$

Siccome f è per ipotesi continua, anche le derivate seconde miste risultano essere continue e per il teorema di Schwarz devono essere uguali. Si ottiene quindi che per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vale $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ da cui si ricava $f(x, y) = 0$.