Analisi Matematica Due, secondo modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

8 aprile 2002

1. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 10y = x^2 + 2.$$

Soluzione. Risolviamo innanzitutto l'equazione omogenea associata: $y'' - 6y' + 10y = 0$. Le radici del polinomio associato $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ sono $\lambda_{12} = 3 \pm i$. Dunque tutte le soluzioni dell'omogenea sono della forma

$$y(x) = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogena nella forma $\bar{y}(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$. Si avrà dunque $\bar{y}'(x) = 2a_1x + a_2$, $\bar{y}''(x) = 2a_1$ e sostituendo nell'equazione otteniamo

$$\bar{y}'' - 6\bar{y}' + 10\bar{y} = 10a_1x^2 + (10a_2 - 12a_1)x + 10a_3 - 6a_2 + 2a_1 = x^2 + 2.$$

Uguagliando i coefficienti dei due polinomi e risolvendo il sistema nelle variabili a_1, a_2, a_3 si ottiene $a_1 = 1/10$, $a_2 = 3/25$ e $a_3 = 63/250$. Dunque la funzione $\bar{y}(x) = x^2/10 + 3x/25 + 63/250$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

In conclusione tutte le soluzioni dell'equazione data sono della forma

$$y(x) = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x^2/10 + 3x/25 + 63/25$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x^2)^2 y'y'' - x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione. Siccome non compare il termine y, si può considerare l'equazione differenziale come una equazione del primo ordine nella funzione incognita $z = y'$. Dunque possiamo preliminarmente risolvere il problema di Cauchy in z:

$$\begin{cases} (1-x^2)^2 z z' - x = 0 \\ z(0) = -1 \end{cases} \tag{1}$$

Notiamo che questa equazione è a variabili separabili infatti, dividendo tutto per $(1-x^2)^2$, si ottiene l'equazione

$$z(x)z'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

che integrata ci dà

$$\frac{1}{2}z^2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2} + c.$$

Ponendo la condizione $z^2(0) = (y'(0))^2 = 1$ si ottiene $c = 0$ e quindi $z^2(x) = 1/(1-x^2)$. Essendo $z(0) = -1 < 0$ scegliamo dunque la soluzione negativa $z(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$. ([1])

Ricordando ora che $y' = z$ otteniamo $y(x) = -\arcsin(x) + c'$. Dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $c' = 1$. La soluzione cercata è quindi

$$y(x) = 1 - \arcsin(x).$$

3. Si studi qualitativamente il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-x)(x^2y+1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dimostrando che se $x_0 = y_0 \geq 0$

(a) la soluzione ha esistenza globale;

(b) la soluzione ha come asintoto orizzontale $y = 0$;

(c) la derivata della soluzione si annulla tre volte.

Facoltativi:

(d) se $x_0 > 1$ e $y_0 > 2x_0$ allora per ogni $x > x_0$ si ha $y(x) > 2x$;

(e) esistono x_0 e y_0 per i quali la soluzione ha un asintoto verticale.

Soluzione. Studiando il segno di $f(x,y) = (y-x)(x^2y+1)$ si nota che f si annulla su $y = x$ e su $y = -1/x^2$. Inoltre f è negativa nelle zone comprese tra le due curve ed è positiva nelle zone esterne.

[1] Per il teorema di esistenza e unicità locale questa è l'unica soluzione del problema di Cauchy in forma normale $z' = x/(z(1-x^2)^2)$, $z(0) = -1$ nell'intervallo $]-1,1[$ e quindi, in tale intervallo, è anche l'unica soluzione del problema (1). D'altra parte la soluzione trovata non può essere estesa ai limiti dell'intervallo in quanto la derivata non ha limite finito nei punti 1 e -1 e dunque quella che abbiamo trovato è l'unica soluzione massimale del problema (1).

FIGURA MANCANTE

(a) Consideriamo la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy con dato iniziale $y(x_0) = x_0$. Studiamo dapprima il comportamento per $x > x_0$. Notiamo che $y'(x_0) = 0$ dunque se $x > x_0$ è abbastanza piccolo la soluzione starà al di sotto della retta $y = x$ e al di sopra della curva $y = -1/x^2$. Fintantochè la soluzione si trova in questa zona sarà strettamente decrescente. Se la soluzione rimane al di sopra della curva $y = -1/x^2$ allora non potrà avere asintoti verticali e quindi ci sarà esistenza per ogni $x > x_0$. Se invece la soluzione tocca la curva $y = -1/x^2$ in tale punto la derivata si annulla e da lì in poi la funzione sarà strettamente crescente. Una volta al di sotto della curva $y = -1/x^2$ non è però più possibile che la soluzione riattraversi tale curva, in quanto nel punto di attraversamento dovrebbe avere derivata maggiore di zero. Dunque anche in questo caso la soluzione esisterà per ogni $x > x_0$.

    Un ragionamento analogo si fa per $x < x_0$. La funzione (al diminuire della x) decresce, ma non può mai attraversare la curva $y = x$ (per attraversarla da sopra a sotto dovrebbe avere derivata maggiore di 1). La soluzione potrebbe invece attraversare la curva $y = -1/x^2$ (per qualche $x < -1$) ma da lì in poi (sempre al decrescere di x) sarebbe allora strettamente crescente e non potrebbe più riattraversare la curva $y = -1/x^2$.

    Dunque la soluzione (se $x_0 = y_0 > 0$) ha esistenza globale.

(b) Abbiamo già visto che la soluzione è, per x abbastanza grande, monotona e limitata. Dunque esisterà finito il limite $l = \lim_{x\to+\infty} y(x)$. Se fosse $l \neq 0$ si avrebbe $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty}(y(x) - x)(x^2y(x) + 1) = \mp\infty$ (a seconda del segno di l) che è assurdo in quanto $y(x)$ ha un asintoto orizzontale. Quindi necessariamente $l = 0$.

(c) Dalle considerazioni fatte in precedenza abbiamo già visto che la nostra soluzione ha un punto critico ($y' = 0$) per $x = x_0$ (attraversamento della retta $y = x$). Per dimostrare che in totale ci sono tre punti critici dobbiamo dimostrare che la soluzione incontra entrambi i rami della curva $y = -1/x^2$. Abbiamo già mostrato che non può attraversare lo stesso ramo più di una volta. Proviamo ora che la soluzione attraversa la curva $y = -1/x^2$ in un punto $x > 0$.

    Consideriamo il limite $\alpha = \liminf_{x\to+\infty} |x^2y(x) + 1|$ (a priori $\alpha \in [0, +\infty]$). Se fosse $\alpha > 0$ allora si avrebbe $\liminf_{x\to+\infty} |y'(x)| = \liminf_{x\to+\infty} |(y(x) - x)| \cdot |(x^2y(x) + 1)| = +\infty$. Dunque esisterebbe il limite $\lim y'(x)$ ma sarebbe infinito, il che è assurdo in quanto $y(x) \to 0$. Dunque necessariamente $\liminf_{x\to\infty} |x^2y(x) + 1| = 0$ e quindi frequentemente (per $x \to +\infty$) si deve avere $x^2y(x) < 0$ ovvero $y(x) < 0$. Ma se in un punto $\bar{x}$ si ha $y(\bar{x}) < 0$ allora sicuramente la soluzione $y(x)$ incontra la curva $y = -1/x^2$ perché, al di sopra di tale curva, $y(x)$ è decrescente e negativa mentre $y = -1/x^2$ è negativa, crescente e tende a 0.

(d) Consideriamo il sottoinsieme del piano $V = \{(x, y)\, x > 1,\ y > 2x\}$. Dobbiamo dimostrare che se $(x_0, y_0) \in V$ allora $y(x) \in V$ per ogni $x > x_0$. Notiamo che su V si ha $f(x, y) = (y-x)(x^2y+1) > 2$ infatti $y-x > x > 1$ e $x^2y+1 > 2x^3+1 > 2$. Dunque se $y(x)$ è la soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0) \in V$, finchè $(x, y(x)) \in V$ si avrà $y'(x) > 2$. Equivalentemente si ha $(y(x) - 2x)' > 0$ e quindi se $x > x_0$ si avrà $y(x) - 2x > y(x_0) - 2x_0 > 0$ e quindi $y(x) > 2x$.

(e) Notiamo che nell'insieme V definito in precedenza vale la seguente stima:

$$f(x, y) = (y - x)(x^2y + 1) > \frac{y}{2}(y + 1) > \frac{y^2}{2}$$

che ci permetterà di confrontare le soluzioni $y(x)$ del nostro problema con quelle del problema più semplice $z' = z^2/2$. Infatti la soluzione del problema di Cauchy: $z'(x) = z^2/2$, $z(x_0) = y_0$ è $z(x) = 2/(x_0 + 2/y_0 - x)$ che ha un asintoto verticale per $x = x_0 + 2/y_0 > x_0$. Supponendo ora $(x_0, y_0) \in V$ si verifica facilmente che $(x, z(x)) \in V$ per ogni $x > x_0$ (è sufficiente notare che $z'(x) > 2$ in V). Possiamo ora applicare il teorema del confronto tra $y(x)$ e $z(x)$ sull'insieme A. Otteniamo quindi che $y(x) > z(x)$ per ogni $x > x_0$ e dunque necessariamente $y(x)$ ha un asintoto verticale.