Forme differenziali

22 aprile 2002

1. Determinare tra le seguenti forme differenziali quelle chiuse e quelle esatte:
$$-y\,dx+\sin x\,dy,\qquad xy\,dx+\frac{x^2}{2}\,dy,\qquad \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(y\,dx-x\,dy).$$

2. Sia γ_r la circonferenza di raggio r di equazione parametrica $x(t)=r\cos t$, $y(t)=r\sin t$ con $t\in[0,2\pi]$. Posto
$$\omega=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$
determinare per ogni $r>0$ il valore di $\int_{\gamma_r}\omega$.

   Dopo aver verificato che ω è una forma chiusa, determinare $\int_\eta\omega$ quando η è la curva chiusa di equazione $x(t)=(2+6\cos t)\sin t$, $y(t)=12+9\sin t$ ($t\in[0,2\pi]$).

3. Determinare $\int_\gamma\omega$ quando
$$\gamma(t)=(1+t^2)(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t)),\qquad t\in[-1,1],$$
$$\omega=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

4. Dato $r>0$, $r\neq 1$ poniamo
$$\gamma(t)=(1+r\cos t,r\sin t),\qquad t\in[0,2\pi],$$
$$\omega=\frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2}.$$
Verificare che ω è una forma chiusa ma non è esatta. Determinare poi, al variare di r, il valore di $\int_\gamma\omega$.

5. Mostrare che la forma
$$\omega=\frac{y\,dx-(x+1)\,dy}{(x+1)^2+y^2}-\frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$$

è chiusa. Determinare poi $\int_\gamma \omega$ per ognuna delle seguenti curve γ parametrizzate al variare di $t \in [0, 2\pi]$:

$$(\sin t - \cos t, 1 + (t-\pi)^2), \quad (\cos t - 1, \sin t),$$

$$(3 + 5\cos t, \sin t), \quad (\cos \frac{t}{2}, t^2 - 2\pi t + 2).$$

Revisioni

11 aprile 2003: corretto l'enunciato dell'esercizio 3.

6 aprile 2004: modificate le curve nell'esercizio 5.