Analisi Matematica Due, secondo modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

24 maggio 2002

1. Sia D il dominio delimitato dalla curva (cardioide) di equazione

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

   Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

   Soluzione. Converrà calcolare tale integrale in coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Il dominio in coordinate polari è dunque dato da $D' = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1+\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (che è un dominio normale rispetto a θ). Ricordando che il determinante Jacobiano della trasformazione è ρ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy &= \iint_{D'} \rho^2 \; d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} \rho^2\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^3}{3}\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[1 + 3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta\right] d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[1+3\cos^2\theta\right] d\theta \\
&= \frac{5}{3}\pi.
\end{aligned}$$

   Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che, per questioni di simmetria, si ha $\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1} = 0$ e $\int_0^{2\pi}\cos^2 = \pi$.

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{-y}{x^2+4y^2}dx + \frac{x}{x^2+4y^2}dy.$$

   (a) Dire se ω è chiusa nell'insieme di definizione;

(b) dire inoltre se è esatta in tale insieme;

(c) calcolare

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-2\cos(\pi t) - 2\pi t \sin(\pi t)}{4t^2 + 4\cos^2(\pi t)} dt.$$

Soluzione. Posto $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ calcoliamo f_y e g_x:

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{-(x^2+4y^2) + y \cdot 8y}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2+4y^2)^2} \\ f_x(x,y) &= \frac{(x^2+4y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+4y^2)^2} = f_y(x,y) \end{aligned}$$

da cui risulta che la forma differenziale è chiusa.

Siccome il dominio di definizione è $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che non è un insieme semplicemente connesso, non possiamo immediatamente dedurre che ω è esatta. Al contrario dimostreremo che ω non è esatta, in quanto esiste un cammino chiuso γ completamente contenuto in Ω e tale che $\int_\gamma \omega \neq 0$. Il denominatore comune della forma differenziale ci suggerisce la seguente scelta per γ:

$$\gamma(t) = (\cos t, (\sin t)/2), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha infatti

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{1}{2}\sin t(-\sin t) + (\cos t)\frac{1}{2}\cos t}{\cos^2 t + 4((\sin t)/2)^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt = \pi.$$

Dunque ω non è esatta.

Per quanto riguarda l'integrale da calcolare, si può notare che tale integrale non è altro che $\int_{\gamma_1} \omega$ dove γ_1 è la curva

$$\gamma_1(t) = (2t, \cos(\pi t)) \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

La curva $\gamma_1(t)$ è una curva che unisce i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ passando al di sopra del punto "singolare" $(0,0)$. D'altra parte la curva $\gamma_2 = \gamma_{|[0,\pi]}$ (la curva considerata in precedenza ma ristretta all'intervallo $t \in [0,\pi]$) è una curva che unisce i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sempre passando al di sopra del punto singolare. Consideriamo dunque la "concatenazione" di queste due curve $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$. La curva γ_3 risulta essere una curva chiusa che non contiene il punto $(0,0)$. Tale curva è contenuta in un sottoinsieme semplicemente connesso di Ω, su tale sottoinsieme ω è dunque esatta (in quanto chiusa su un semplicemente connesso) e quindi $\int_{\gamma_3} \omega = 0$. Ne consegue che $\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega$. D'altra parte quest'ultimo integrale si calcola facilmente come in precedenza e risulta $\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^\pi \frac{1}{2} = \pi/2$. Il risultato cercato è dunque $-\pi/2$.

Soluzione alternativa. Supponiamo per assurdo che ω sia esatta. Allora dovrebbe esistere una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $dF = \omega$. Cioè dovrebbe valere:

$$\begin{cases} F_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+4y^2} \\ \\ F_y(x,y) = \frac{x}{x^2+4y^2}. \end{cases}$$

Si consideri ora $\Omega' = \{(x,y) : y > 0 \text{ oppure } x \neq 0\}$ e la funzione $G : \Omega' \to \mathbb{R}$:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\arctan(2y/x) & \text{se } x > 0 \\ \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x = 0 \\ \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan(2y/x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si può verificare che su Ω' la funzione G è differenziabile e si ha $dG = \omega$. Dunque se esistesse F si avrebbe che $F - G$ è costante su Ω', d'altra parte G ha una discontinuità per $y < 0$ e $x = 0$ (sul bordo di Ω') e quindi F non può essere continua su tutto Ω. Quindi ω non è esatta.

Notiamo però che la curva $\gamma_1 = (2t, \cos(\pi t))$, $t \in [-1/2, 1/2]$ è interamente contenuta in Ω' e quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = G(\gamma_1(1/2)) - G(\gamma_1(-1/2)) = G(1,0) - G(-1,0) = 0 - \frac{\pi}{2}.$$

3. Si consideri la regione $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x^2(1-x^2)\}$. Dopo aver verificato che la curva $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$ ha come immagine ∂D, calcolare l'area di D.

   Soluzione. Innanzitutto si ha $\partial D = \{(x,y) : y^2 = 4x^2(1-x^2)\}$[1]. Dato qualunque $t \in \mathbb{R}$ posto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ si ha $y^2(t) = \sin^2(2t) = 4\sin^2 t \cos^2 t$ e $4x^2(t)(1-x^2(t)) = 4\cos^2(t)\sin^2(t)$ da cui $\gamma(t) \in \partial D$. D'altra parte dato $(x,y) \in \partial D$ si può scegliere $t \in [0, 2\pi]$ in modo che $\gamma(t) = (x,y)$:

$$t = \begin{cases} \arcsin(x) & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 2\pi - \arcsin(x) & \text{se } xy < 0 \\ 2\pi + \arcsin(x) & \text{se } x \leq 0,\ y \leq 0. \end{cases}$$

   Dunque la curva γ sull'intervallo $[0, 2\pi]$ parametrizza la frontiera ∂D. Ricordiamo ora che l'area della regione racchiusa da una curva chiusa γ orientata in senso antiorario è data da $-\int_\gamma y\,dx$. La nostra curva invece è

[1] Il fatto che $\partial\{f \leq 0\} = \{f = 0\}$ è di per sé intuitivo, ma non è sempre vero. Se f è continua è facile dimostrare che $\partial\{f \leq 0\} \subset \{f = 0\}$. L'inclusione inversa $\{f = 0\} \subset \partial\{f \leq 0\}$ è più delicata. Bisogna dimostrare che se $f(x,y) = 0$ allora ogni intorno di (x,y) contiene punti in cui $f > 0$ e punti in cui $f < 0$. Quando $\nabla f(x,y) \neq 0$ questo è una conseguenza del teorema del Dini. Nel nostro caso ($f = y^2 - 4x^2(1-x^2)$) c'è però un punto (il punto $(0,0)$) che verifica $f = 0$ e anche $\nabla f = 0$. Tale punto va trattato a parte. Ad esempio, nel nostro caso, è sufficiente notare che $f(\varepsilon, 0) < 0$ e $f(0, \varepsilon) > 0$ per $\varepsilon \in (0,1)$.

orientata in senso orario nel tratto $t \in [0, \pi]$ e in senso antiorario nel tratto $t \in [\pi, 2\pi]$. Per ovviare a questo possiamo considerare separatamente i due "laccetti" orientati in senso opposto. Sia dunque $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ per $t \in [0, \pi]$ e $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ per $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Si ha dunque

$$\begin{aligned} Area(D) &= \int_{\gamma_1} y\,dx - \int_{\gamma_2} y\,dx \\ &= \int_0^{\pi} 2 \sin t \cos^2 t\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} 2 \sin t \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{2}{3}\left[-\cos^3 t\right]_0^{\pi} - \frac{2}{3}\left[-\cos^3 t\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$