

funzioni continue

22 novembre 2002

1. Dimostrare che se $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ è una qualunque funzione continua e se $[c, d] \subset [a, b]$ allora l'equazione

$$f(x) = x$$

ha soluzione.

2. Provare che

- (a) esiste una funzione $f:]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ continua e bigettiva;
- (b) non esiste alcuna funzione $f: [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ continua e surgettiva;
- (c) esiste una funzione $f: [0, 1[\rightarrow]0, 1[$ continua e surgettiva;
- (d) non esiste una funzione $f: [0, 1[\rightarrow]0, 1[$ continua e bigettiva;
- (e) esiste una funzione $f: [0, 1[\rightarrow]0, 1[$ bigettiva (non continua).

3. (a) Verificare che la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

è discontinua in ogni punto $x_0 \in \mathbf{R}$.

- (b) Trovare una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua nel punto 0 e discontinua in ogni altro punto di \mathbf{R} .
- (c) Trovare una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile nel punto 0 e discontinua in ogni altro punto di \mathbf{R} .