

Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni prova scritta n. 3/I-II, n. 5/I e n. 3/II

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

23 settembre 2003

1. Mostrare che per ogni $x > 0$ si ha

$$e^x > x(1 + \log x) + 1.$$

Soluzione. Si tratta di studiare il segno della funzione

$$f(x) = e^x - x(1 + \log x) - 1$$

sul suo dominio $\{x > 0\}$. Innanzitutto consideriamo la derivata prima

$$f'(x) = e^x - \log x - 2 = (e^x - x - 1) + (x - 1 - \log x) = h(x) + g(x).$$

Il primo addendo $h(x)$ è positivo, essendo $h'(x) = e^x - 1 > 0$ per ogni $x > 0$. Il secondo addendo $g(x)$ è pure ≥ 0 , infatti essendo $g'(x) = 1 - 1/x$ la funzione g ha minimo assoluto (per $x > 0$) nel punto $x = 1$ e $g(1) = 0$. Dunque $f'(x)$ è positivo e in conclusione f è strettamente crescente. Essendo infine

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

abbiamo, come voluto, $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \sin \frac{1}{n} - n^2.$$

Soluzione. Per il teorema di legame tra limiti di successioni e limiti di funzioni sappiamo che il limite in questione ha lo stesso valore del limite (ottenuto ponendo $x = 1/n$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \sin x - \frac{1}{x^2}$$

se quest'ultimo limite esiste. Per calcolare questo limite possiamo quindi applicare il teorema de l'Hôpital ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \sin x - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Dunque il limite in questione converge al valore $-1/6$.

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \log(4 - x^2) dx.$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \int \log(4 - x^2) dx &= \int \log[(2 - x)(2 + x)] dx = \int \log(2 - x) + \log(2 + x) dx \\ &= \int \log(2 - x) dx + \int \log(2 + x) dx \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(2 - x) dx + \int_0^1 \log(2 + x) dx &= - \int_2^1 \log y dy + \int_2^3 \log y dy \\ &= \int_1^3 \log y dy = [y \log y - y]_1^3 \\ &= 3 \log 3 - 3 - \log 1 + 1 = 3 \log 3 - 2. \end{aligned}$$

4. Si consideri la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

- (a) Provare che la serie converge;
- (b) trovare la somma della serie.

Soluzione.

(a) Notiamo che si ha

$$a_k = \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log \left(1 + \frac{1}{k^2 + 2k} \right) = \log(1 + 1/k^2 + o(1/k^2)) = 1/k^2 + o(1/k^2).$$

Dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 a_k = 1$$

e la serie converge per il criterio degli infinitesimi.

(b) Notiamo che si ha

$$a_k = \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log \frac{k+1}{k} - \log \frac{k+2}{k+1} = b_k - b_{k+1}$$

dove

$$b_k = \log \frac{k+1}{k}.$$

Dunque la serie è telescopica, in particolare si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} = \log 2 - \log \frac{n+2}{n+1}$$

ed quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log 2 - \log \frac{n+2}{n+1} = \log 2.$$