

# Analisi Matematica I e II modulo

## Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

9 febbraio 2004

1. Dopo aver disegnato il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 + \log x}$$

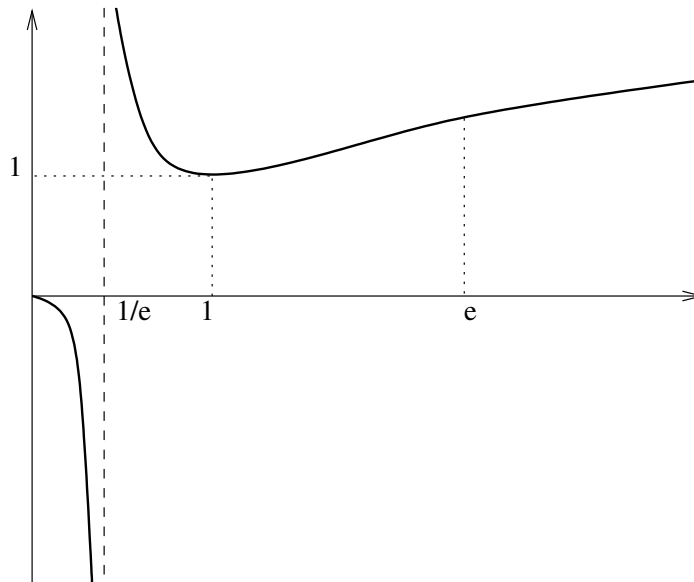
determinare per quali valori del parametro  $m$  la retta  $y = mx$  interseca il grafico della funzione  $y = f(x)$ .

*Soluzione.* La funzione è definita per  $x > 0$  e  $x \neq 1/e$ . Si ha

$$f'(x) = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}, \quad f''(x) = \frac{1 - \log x}{x(1 + \log x)^3}.$$

Dunque la funzione è decrescente per  $x \leq 1$ , ed è convessa per  $1/e \leq x \leq e$ . In  $x = 1$  c'è un punto di minimo relativo  $f(1) = 1$ . Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha  $f(x) \rightarrow 0$  e  $f'(x) \rightarrow 0$ ; per  $x \rightarrow 1/e$  si ha  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ; per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Si può quindi concludere che il grafico della funzione ha l'andamento riportato in figura.



Per trovare le rette che intersecano il grafico della funzione è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx \end{cases}$$

trovando che ogni valore di  $m$  è ammissibile, tranne il valore  $m = 0$ .

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n\sqrt{n^2+n} - 2n^2 - n}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}$$

*Soluzione.* Notiamo che si ha

$$\frac{1}{n^2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \rightarrow e^2.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{n^2+n} - 2n^2 - n &= \frac{4n^2(n^2+n) - (2n^2+n)^2}{2n\sqrt{n^2+n} + 2n^2+n} \\ &= \frac{-n^2}{2n^2(\sqrt{1+1/n} + 1) + n} \rightarrow -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

In definitiva il limite richiesto vale  $-e^2/4$ .

3. Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-e}^{-1} -\log^2 |x| dx.$$

*Soluzione.* Posto  $x = -e^t$ ,  $dx = -e^t dt$  si trova

$$\begin{aligned} -\int_{-e}^{-1} \log^2 |x| dx &= -\int_{-e}^{-1} \log^2(-x) dx = -\int_1^0 t^2(-e^t) dt \\ &= -\int_0^1 t^2 e^t dt = -[(t^2 - 2t + 2)e^t]_0^1 = -(e - 2) = 2 - e. \end{aligned}$$

4. Dire per quali valori del parametro  $\alpha > 0$  la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \log n}{n^\alpha}$$

converge.

*Soluzione.* Utilizziamo il criterio degli infinitesimi per confrontare la serie data con la serie di termine generico  $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ . Si ha

$$n^{\alpha-1} a_n = n^{\alpha-1} \frac{n - \log n}{n^\alpha} = 1 - \frac{\log n}{n} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dunque la serie data ha lo stesso carattere della serie  $\sum 1/n^{\alpha-1}$  e quindi converge per  $\alpha > 2$  e diverge altrimenti.