

Analisi Matematica III modulo

Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

18 novembre 2003

1. (a) Data la successione di funzioni

$$f_k(x) = xe^{-kx^3},$$

stabilire se la successione converge uniformemente sull'insieme in cui c'è convergenza puntuale.

- (b) Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} xe^{-kx^3},$$

stabilire se la serie converge totalmente sull'insieme in cui c'è convergenza puntuale (della serie stessa).

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{\sqrt{|x| + |y|}}.$$

3. Si consideri la funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \log(1 + xy)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in D \setminus (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sull'insieme $D = \{(x, y): xy > -1\}$.

- (a) Disegnare il dominio D .
(b) Dato un qualunque vettore unitario (una direzione) $\lambda = (\alpha, \beta)$ calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0).$$

- (c) Dire se f è differenziabile nel punto $(0, 0)$.