Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

9 febbraio 2004

1. (a) Calcolare il limite
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{kx^3}{kx^2+1} e^{-x^2}\, dx.$$

   (b) Studiare la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni g_k definite da
$$g_k(x) = \int_0^x \frac{kt^3}{kt^2+1} e^{-t^2}\, dt.$$

   Soluzione. Posto
$$f_k(x) = \frac{kx^3}{kx^2+1} e^{-x^2}$$
si verifica che $f_k(x)$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = xe^{-x^2}$. Mostriamo che la convergenza è uniforme.

   Si ha infatti
$$|f_k(x) - f(x)| = \left| \frac{-x}{kx^2+1} e^{-x^2} \right|$$
Studiando la funzione $h(x) = \frac{x}{kx^2+1}$ si trova facilmente che tale funzione è dispari, tende a zero all'infinito, e ha massimo e minimo assoluto nei punti $x = 1/\sqrt{k}$. Dunque si ha
$$|h(x)| \leq |h(1/\sqrt{k})| = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$
Di conseguenza, essendo $e^{-x^2} \leq 1$, si ottiene
$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \qquad \forall x$$
ed essendo $1/(2\sqrt{k}) \to 0$ deduciamo che la successione f_k converge uniformemente a $f(x)$.

   Per il teorema dello scambio del limite con l'integrale possiamo concludere che il limite cercato al punto (a) è uguale a
$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - 1/e).$$

   Per il teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che $g_k'(x) = f_k(x)$ ed abbiamo appena mostrato che f_k converge uniformemente a $f(x)$. D'altra parte si nota che $g_k(0) = 0$ converge. Dunque per il teorema di scambio del limite con la derivata sappiamo che la successione g_k converge uniformemente su ogni intervallo limitato $[a,b]$ ad una funzione g tale che $g'(x) = f(x)$ e $g(0) = 0$. Si trova quindi $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

Possiamo anche mostrare che la convergenza di g_k a g è uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \sup_x |g_k(x) - g(x)| &= \sup_x \left| \int_0^x f_k(t) - f(t)\, dt \right| \\ &= \sup_x \left| \int_0^x -h(t)e^{-t^2}\, dt \right| \end{aligned}$$

per quanto visto prima si ha poi

$$\begin{aligned} \cdots &\le \sup_x \left| \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{k}} e^{-t^2}\, dt \right| \\ &\le \frac{1}{2\sqrt{k}} \sup_x \left| \int_0^x e^{-t^2}\, dt \right|. \end{aligned}$$

Notando che $e^{-t^2} \le \frac{1}{1+t^2}$ si trova che $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ si

trova che $G(x)$ è una funzione limitata su tutto $\mathbb{R}$, cioè $\sup_x |G(x)| = M < +\infty$ e quindi si ottiene

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_k(x) - g(x)| \le \frac{M}{2\sqrt{k}} \to 0$$

che significa che g_k converge uniformemente a g su tutto $\mathbb{R}$.

2. Dire se la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|(x+y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua e se è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Si ha

$$\left| \frac{|x|(x+y)}{|x|+|y|} \right| = \frac{|x||x+y|}{|x|+|y|} \le \frac{|x|(|x|+|y|)}{|x|+|y|} = |x| \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

dunque la funzione è continua in $(0,0)$.

Calcolando le derivate direzionali in $(0,0)$ nella direzione $\lambda = (\alpha,\beta)$ si ottiene invece

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \lambda} = \lim_{h\to 0} \frac{|h\alpha|(h\alpha + h\beta)}{h(|h\alpha| + |h\beta|)} = \frac{|\alpha|(\alpha+\beta)}{|\alpha|+|\beta|}.$$

Siccome questa quantità non è lineare in α e β concludiamo che f non può essere differenziabile in $(0,0)$.

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$y' + 4\frac{y}{x} = e^{-x}.$$

Soluzione. Moltiplicando l'equazione per $x^4 = \exp(\int 4/x\, dx)$ si ottiene

$$x^4 y' + 4x^3 y = x^4 e^{-x}$$

ovvero
$$(x^4 y)' = x^4 e^{-x}.$$

Posto $z = x^4 y$ stiamo cercando una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $z' = x^4 e^{-x}$. Sappiamo che una soluzione z deve essere nella forma

$$z(x) = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)e^{-x}, \quad z'(x) = x^4 e^{-x}$$

e risolvendo si ottengono i valori di A, B, C, D, E:

$$z(x) = (-x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 24x + 24)e^{-x}.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione data sono

$$y(x) = \frac{(-x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 24x + 24)e^{-x} + c}{x^4}.$$

Modifiche

28.02.2004 Ho sistemato la soluzione del primo esercizio, che non era completa.