

# Analisi Matematica IV modulo

## Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

21 maggio 2004

1. Si consideri la forma differenziale  $\omega$  definita sull'aperto  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  dall'espressione

$$\omega = \frac{y^3 dx - 3xy^2 dy}{x^2 + y^6}.$$

- (a) Dire se  $\omega$  è chiusa in  $A$ .  
(b) Dire se  $\omega$  è esatta in  $A$ .  
(c) Calcolare  $\int_\gamma \omega$  sulla circonferenza  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Soluzione.* Si ha  $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$  con

$$a(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^6}, \quad b(x, y) = \frac{-3xy^2}{x^2 + y^6}.$$

Essendo

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{3y^2(x^2 + y^6) - y^3 6y^5}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{3x^2 y^2 - 3y^8}{(x^2 + y^6)^2}$$

e

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{-3y^2(x^2 + y^6) + 3xy^2 2x}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{3x^2 y^2 - 3y^8}{(x^2 + y^6)^2}$$

si nota che  $a_y = b_x$  e quindi la forma  $\omega$  è chiusa.

Consideriamo ora la curva  $\phi(t) = (\cos t, \sqrt[3]{\sin t})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Tale curva è continua, è chiusa (infatti  $\phi(0) = \phi(2\pi)$ ) ed è contenuta nel dominio  $A$  (in quanto per ogni  $t$  si ha  $\phi(t) \neq (0,0)$ ). Se  $\omega$  fosse esatta su  $A$  si dovrebbe avere quindi  $\int_\phi \omega = 0$ . Essendo invece

$$\begin{aligned} \int_\phi \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t(-\sin t) - 3 \cos t \sqrt[3]{\sin^2 t} \frac{1}{3} (\sin t)^{-\frac{2}{3}} \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t dt = -2\pi \end{aligned}$$

deduciamo che  $\omega$  non è esatta.

Inoltre possiamo affermare che  $\int_\gamma \omega = \int_\phi \omega = -2\pi$  in quanto la curva  $\phi$ , come la curva  $\gamma$ , compie un giro in senso antiorario attorno all'origine  $(0,0)$ .

Per essere più precisi possiamo costruire due curve  $\alpha$  e  $\beta$  definite per  $t \in [0, 2\pi]$  in questo modo

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{per } t \in [0, \pi] \\ \phi(2\pi - t) & \text{per } t \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \quad \beta(t) = \begin{cases} \phi(\pi - t) & \text{per } t \in [0, \pi] \\ \gamma(t) & \text{per } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Si nota che la curva  $\alpha$  è una curva continua in quanto  $\gamma(\pi) = \phi(\pi)$  ed è chiusa in quanto  $\gamma(0) = \phi(0)$ . Inoltre tale curva è contenuta nell'insieme  $A^+ = \{y \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}$ . Essendo  $\omega$  chiusa ed essendo  $A^+$  semplicemente connesso se ne deduce che  $\omega$  è esatta su  $A^+$  e quindi che  $\int_{\alpha} \omega = 0$ . Discorso analogo si può fare per  $\beta$  trovando quindi  $\int_{\beta} \omega = 0$ . Notiamo ora che

$$\int_{\gamma} \omega - \int_{\phi} \omega = \int_{\gamma|_{[0,\pi]}} \omega - \int_{\phi|_{[0,\pi]}} \omega + \int_{\gamma|_{[\pi,2\pi]}} \omega - \int_{\phi|_{[\pi,2\pi]}} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega = 0$$

giustificando quindi l'affermazione  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\phi} \omega$  fatta in precedenza.

2. Dopo averlo disegnato, calcolare l'area del dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  delimitato dal segmento  $\overline{PQ}$  di estremi  $P = (-3\pi, 0)$ ,  $Q = (-\pi, 0)$  e dal tratto di spirale di Archimede  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$  con gli stessi estremi.

*Soluzione.* Il disegno del dominio  $D$  è riportato in figura. Per calcolare l'area notiamo che  $D$  si può rappresentare in coordinate polari dal dominio normale  $\theta \in [\pi, 3\pi]$ ,  $0 \leq \rho \leq \theta$ . Dunque si ha

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D dx dy = \int_{\pi}^{3\pi} \int_0^{\theta} \rho d\rho d\theta = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2} \theta^2 d\theta \\ &= \frac{1}{6} [\theta^3]_{\pi}^{3\pi} = \frac{27\pi^3 - \pi^3}{6} = \frac{13}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

