Analisi Matematica III e IV modulo
Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

25 maggio 2004

1. Determinare almeno un intervallo (non banale) dove la seguente serie di funzioni converge totalmente
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k.$$

   Soluzione. Consideriamo un intervallo del tipo $[-r, r]$. La funzione
$$f_k(x) = \frac{k^k}{k!} x^k$$
è dispari per k dispari ed è pari per k pari e per $x \geq 0$ è crescente. Dunque si ha
$$\sup_{x \in [-r,r]} |f_k(x)| = f_k(r) = \frac{k^k}{k!} r^k.$$
Quindi la serie data converge totalmente sull'intervallo $[-r, r]$ se e solo se la serie numerica, a termini positivi,
$$\sum_k \frac{k^k}{k!} r^k$$
converge. Applicando a quest'ultima serie il criterio del rapporto si ottiene
$$\frac{\frac{(k+1)^(k+1)}{(k+1)!} r^{k+1}}{\frac{k^k}{k!} r^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} r = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k r \to er$$
e quindi la serie converge se $er < 1$ cioè se $r < 1/e$. Dunque la serie di funzioni converge totalmente su tutti gli intervalli $[-r, r]$ con $r < 1/e$.

2. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione
$$f(x, y) = (4x^2 - 1)^4 + [y - \sin(\pi x)]^4.$$

   Soluzione. Si ha
$$\begin{cases} f_x = 4(4x^2 - 1)^3 8x + 4(y - \sin \pi x)^3(-\pi \cos \pi x) \\ f_y = 4(y - \sin \pi x)^3 \end{cases}$$
da cui si trova che il sistema $\nabla f = 0$ diventa
$$\begin{cases} y = \sin \pi x \\ (4x^2 - 1)^3 = 0 \end{cases}$$

da cui $x \in \{0, 1/2, -1/2\}$ e $y = \sin \pi x$. Abbiamo quindi tre punti critici:

$$(0,0), \quad (1/2,1) \quad (-1/2,-1).$$

Si può verificare facilmente che il determinante Hessiano in tutti e tre i punti critici risulta essere nullo.

Notiamo però che f non è mai negativa (in quanto somma di potenze pari). Ed essendo $f(1/2,1) = f(-1/2,-1) = 0$ deduciamo immediatamente che $(1/2,1)$ e $(-1/2,-1)$ sono due punti di minimo assoluto.

Per quanto riguarda il punto $(0,0)$ notiamo che restringendosi alla retta $x = 0$ la funzione $f(0,y)$ ha un minimo (assoluto) stretto. Mentre sulla curva $y = \sin \pi x$, essendo $f_y = 0$ ed essendo $f_x < 0$ per $x \in (0,1/2)$ e $f_x > 0$ per $x \in (-1/2,1)$, la funzione $f(x, \sin \pi x)$ ha un massimo relativo stretto. Dunque il punto $(0,0)$ non è nè massimo nè minimo.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Soluzione. Facendo la sostituzione $y = zx$, $y' = z'x + z$ si ottiene

$$\begin{cases} z'x + z = \frac{x^2+z^2x^2}{x^2z} \\ z(1) = -1. \end{cases}$$

L'equazione si riscrive come

$$z'x = 1/z$$

che risulta essere a variabili separabili. In particolare si ottiene

$$zz' = 1/x$$

che si integra

$$\frac{z^2}{2} = \log|x| + c.$$

Dalla condizione iniziale troviamo $c = 1/2$ e inoltre supponiamo $x > 0$. Si ottiene dunque $z^2 = 2\log x + 1$ da cui

$$z = -\sqrt{1 + 2\log x}$$

in cui abbiamo scelto il segno meno per soddisfare il dato iniziale. In conclusione si ha dunque

$$y = -x\sqrt{1 + 2\log x}.$$

4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma e^x \sin y\, dx + (e^x \cos y + \arctan x)\, dy$$

dove γ è l'arco di parabola di equazione $y = 1 - x^2$ con primo estremo nel punto $(-1,0)$ e secondo estremo nel punto $(1,0)$.

Soluzione. Posto

$$\omega_1 = e^x \sin y\, dy + e^x \cos y\, dy, \qquad \omega_2 = \arctan x\, dy$$

notiamo che l'integrale cercato non è altro che

$$\int_\gamma \omega_1 + \omega_2 = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2.$$

Da una rapida verifica si nota che ω_1 è una forma chiusa. Essendo poi definita su tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, deduciamo che ω_1 è esatta. Dunque se consideriamo il segmento $\sigma(t) = (t, 0)$ con gli stessi estremi di γ, si ha

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_\sigma \omega_1 = \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega_2 &= \int_{-1}^{1} \arctan t(-2t)\, dt = -[t^2 \arctan t]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \\
&= -\frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{1} \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right] dt \\
&= -\frac{\pi}{2} + 2 - [\arctan t]_{-1}^{1} = 2 - \pi.
\end{aligned}$$