Analisi Matematica I modulo
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

17 gennaio 2005

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n\cos n}{4n+1}(1-\cos\frac{2}{n}).$$

Soluzione. Si ha
$$\begin{aligned}\frac{n^3+2n\cos n}{4n+1}(1-\cos\frac{2}{n}) &= \frac{n^3}{n}\frac{1+2\frac{cosn}{n^2}}{4+\frac{1}{n}}\frac{1-\cos^2\frac{2}{n}}{1+\cos\frac{2}{n}} \\ &= \frac{1+2\frac{cosn}{n^2}}{4+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{2}{n}}\cdot n^2\sin^2\frac{2}{n}.\end{aligned} \tag{1}$$

Notiamo quindi che
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n^2}=0$$
in quanto si tratta del prodotto di una successione limitata per una successione infinitesima. Di conseguenza
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\frac{\cos n}{n^2}}{4+\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}.$$

Il limite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\cos\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}$$
è immediato. E infine
$$\lim_{n\to\infty} n^2\sin^2\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\right)^2=4$$
ricordandosi che
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1$$
è un limite notevole.

Per concludere abbiamo visto che la successione scritta in (1) è il prodotto di tre successioni convergenti ai valori $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e 4. Dunque il limite della successione data è il prodotto di questi tre limiti, ossia $\frac{1}{2}$.

2. Fissato il parametro reale $\alpha > 1$ si consideri la funzione
$$f\colon (1,\alpha)\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=\log x-\log\log x.$$

Determinare, quando esistono, il massimo e il minimo di f al variare del parametro $\alpha > 1$.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

da cui segue $\sup f = +\infty$ e quindi f non ammette massimo qualunque sia $\alpha > 1$.

La funzione f è derivabile e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\log x} = \frac{\log x - 1}{x\log x}.$$

Distinguiamo due casi. Se $\alpha \leq e$ si può notare che la derivata di f è sempre negativa sull'intervallo $(1, \alpha)$ dominio di f. Dunque f è strettamente decrescente e quindi non ammette minimo sull'intervallo aperto $(1, \alpha)$. Infatti se fosse $m = \min\{f(x) \colon x \in (1, \alpha)\}$ si dovrebbe avere $m = f(\bar{x})$ per qualche $\bar{x} \in (1, \alpha)$, ma allora scelto $y \in (\bar{x}, \alpha)$ si avrebbe $m = f(\bar{x}) > f(y)$ che contraddice l'ipotesi che m sia il minimo di f. Nel caso $\alpha \leq e$, dunque, la funzione non ha nè massimo nè minimo.

Nel caso $\alpha > e$ la funzione ammette minimo. In questo caso, infatti, la derivata risulta essere negativa nell'intervallo $(1, e)$ e positiva nell'intervallo (e, α). Dunque la funzione è strettamente decrescente in $(1, e]$ e strettamente crescente in $[e, \alpha)$. Questo significa, in particolare, che e è un punto di minimo assoluto per f. Dunque il minimo di f è $f(e) = \log e - \log\log e = 1 - \log 1 = 1$. In questo caso dunque f non ammette massimo mentre il minimo di f è 1.