

# Analisi Matematica III modulo

## Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

29 novembre 2005

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^{13} + x^{26}}{x^6 + y^{26}}.$$

2. Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 e^y - x^2 e^x + y^2 \sin^2 x - x^4 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Dire se  $f$  è continua.  
(b) Dire se  $f$  è derivabile.  
(c) Dire se  $f$  è differenziabile.  
(d) Calcolare  $f_{yxx}(\pi, 0)$ .
3. Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$ .
- (a) Determinare i punti critici, e i punti di massimo o minimo relativo.  
(b) Determinare l'insieme dei punti di massimo o minimo assoluto.  
(c) Determinare i punti di massimo o minimo relativo di  $f$  ristretta al cerchio unitario centrato nell'origine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  
(d) Sia  $f$  come in precedenza e  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Provare che la funzione composta  $g(x, y) = F(f(x, y))$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ha almeno un punto di massimo o di minimo relativo.