Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

21 dicembre 2005

1. Trovare i punti di massimo e di minimo relativo per la funzione

$$f(x, y) = y^{10} + 4y^8 - 4x^3y^5 + x^6.$$

Soluzione. Innanzitutto calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= -12x^2y^5 + 6x^5 = 6x^2(x^3 - 2y^5) \\ f_y &= 10y^9 + 32y^7 - 20x^3y^4. \end{aligned}$$

La derivata parziale f_x si annulla quando $x = 0$ oppure quando $x^3 = 2y^5$. Se $x = 0$ la derivata parziale f_y risulta essere uguale a

$$f_y = 10y^9 + 32y^7 = y^7(10y^2 + 32)$$

e quindi si annulla solo per $y = 0$. Se invece $x^3 = 2y^5$ si ha

$$f_y = 10y^9 + 32y^7 - 40y^9 = 2y^7(16 - 15y^2)$$

che si annulla per $y = \pm\sqrt{16/15}$. In conclusione dobbiamo considerare i tre punti critici $(0, 0)$, $(\pm\sqrt[3]{2}(16/15)^{5/6}, \pm\sqrt{16/15})$. Visto che la funzione è derivabile, questi tre punti sono gli unici candidati ad essere massimi o minimi locali.

Studiamo ora l'andamento della funzione sulla curva $x^3 = 2y^5$. Posto

$$g(y) = f(\sqrt[3]{2y^5}, y) = y^{10} + 4y^8 - 8y^{10} + 4y^{10} = -3y^{10} + 4y^8$$

da cui

$$g'(y) = -30y^9 + 32y^7 = 2y^7(16 - 15y^2).$$

Dunque la funzione g ha un massimo locale nei punti $y = \pm\sqrt{16/15}$ e un minimo locale in $y = 0$. Dallo studio del segno di f_x sappiamo anche che sulla curva $x^3 = 2y^5$ la funzione f, ristretta alle rette orizzontali, presenta sempre dei minimi assoluti (in altre parole: $f(\sqrt[3]{2y^5}, y) \le f(x, y)$ per ogni x e y). Concludiamo che i due punti critici $(\pm\sqrt[3]{2}(16/15)^{5/6}, \pm\sqrt{16/15})$ non sono né massimi né minimi locali.

Il punto $(0, 0)$ è invece un minimo locale. Infatti scelto un punto (x, y) con $|y| < \sqrt{16/15}$ si ha:

$$f(x, y) \ge f(\sqrt[3]{2y^5}, y) \ge f(0, 0).$$

2. Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$f_k(x) = e^{-kx^2}\sin(kx).$$

(a) Determinare l'insieme dei punti in cui c'è convergenza puntuale.

(b) Determinare tutti gli intervalli su cui la successione converge uniformemente.

Soluzione.

(a) Se $x \neq 0$ si ha $e^{-kx^2} \to 0$ in quanto $-kx^2 \to -\infty$ per $k \to \infty$. Essendo $\sin kx$ limitata, si conclude che $f_k(x) \to 0$ per $x \neq 0$. D'altra parte per $x = 0$ si ha $f_k(0) = 0$ e quindi la successione f_k converge puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Se consideriamo il punto $x_k = \pi/(2k)$ notiamo che si ha

$$f_k(x_k) = e^{-\frac{\pi^2}{4k}} \to 1 \qquad \text{per } k \to \infty.$$

Questo significa che non ci può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Visto che $x_k \to 0^+$ e che lo stesso ragionamento si può fare con la successione $-x_k \to 0^-$, deduciamo che non ci può essere convergenza uniforme su nessun intervallo che abbia come punto di accumulazione il punto 0, in quanto in un tale intervallo potremmo trovare infiniti termini della successione x_k o della successione $-x_k$.

Dimostriamo ora che sull'intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 0$ c'è convergenza uniforme. Infatti si ha

$$\sup_{x \geq a} |f_k(x)| \leq \sup_{x \geq a} e^{-kx^2} \leq e^{-ka^2} \to 0.$$

Per simmetria lo stesso risultato si ha sugli intervalli $(-\infty, -a)$.

3. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k 2^k}.$$

Soluzione. La serie data è la specializzazione per $x = -1/2$ della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Questa serie ha raggio di convergenza pari a 1 in quanto

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1.$$

La serie delle derivate è data da

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

che naturalmente ha lo stesso raggio di convergenza $R = 1$ della serie precedente. Inoltre su ogni intervallo del tipo $[-r, r]$ con $r < 1$ si ha che la serie delle derivate converge alla derivata della serie data cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = F(x) \quad \text{con} \quad F'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Dunque $F(x) = -\log(1-x) + c$. Essendo $F(0) = \sum_k 0 = 0$ si ha $c = 0$ e quindi $F(x) = -\log(1-x)$.

In conclusione il risultato dell'esercizio è dato da

$$F(-1/2) = -\log(3/2).$$