

# Analisi Matematica III modulo

## Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

17 gennaio 2006

1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Studiare la continuità e la differenziabilità di  $f$  nel punto  $(0, 0)$ .  
(b) Determinare, se esistono, i valori massimo e minimo assunti da  $f$  sul cerchio unitario  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

*Soluzione.*

- (a) Mostriamo innanzitutto che la funzione è continua. Infatti si ha

$$\left| \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2||y|}{x^2 + y^2} \leq |y| \rightarrow 0 \quad \text{per } (x, y) \rightarrow 0.$$

Per studiare la differenziabilità di  $f$  calcoliamo innanzitutto le derivate parziali.

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$
$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1.$$

Perché la funzione sia differenziabile deve esistere finito il seguente limite:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2y - y^3 + x^2y + y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ma tale limite non esiste, infatti per  $x = 0$  la funzione vale 0, mentre per  $x = y$  la funzione vale  $1/\sqrt{2}$ . Concludiamo quindi che la funzione  $f(x, y)$  non è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ .

- (b) Per determinare i punti di massimo e minimo per  $f$  sul cerchio unitario, cerchiamo innanzitutto eventuali punti critici. Abbiamo già osservato che  $f_y(0, 0) = -1$  e quindi  $(0, 0)$  non è un punto critico. Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  si ha

$$f_x = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x(x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$f_y = \frac{(x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

È facile osservare che  $f_x$  si annulla solo se  $x = 0$  oppure  $y = 0$ , e in entrambi i casi il numeratore di  $f_y$  si annulla solo se  $(x, y) = (0, 0)$  dove però sappiamo essere  $f_y \neq 0$ . Dunque non ci sono punti critici. Il massimo e il minimo della funzione (che devono esistere per il teorema di Weierstrass) si trovano dunque sulla frontiera  $x^2 + y^2 = 1$ .

Parametizziamo la circonferenza con la curva  $(\cos t, \sin t)$  e studiamo la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t \sin t - \sin^3 t.$$

Si ha

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t \\ &= \cos t (\cos^2 t - 5 \sin^2 t) = \cos t (1 - 6 \sin^2 t) \end{aligned}$$

che si annulla quando  $\cos t = 0$ , cioè nei punti  $(0, \pm 1)$  e quando  $\sin^2 t = 1/6$  ovvero nei punti  $(\pm\sqrt{5/6}, \pm\sqrt{1/6})$ . Valutando la funzione nei 6 punti trovati

$$\begin{aligned} f(0, \pm 1) &= \mp 1, \\ f(\pm\sqrt{5/6}, \sqrt{1/6}) &= \frac{2}{3\sqrt{6}}, \\ f(\pm\sqrt{5/6}, -\sqrt{1/6}) &= -\frac{2}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

concludiamo quindi che il valore massimo assunto da  $f$  è 1 mentre il minimo è  $-1$ .

2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (x - k)^2}.$$

- (a) Dire se c'è convergenza totale su tutto  $\mathbb{R}$ .
- (b) Dire se c'è convergenza totale sugli intervalli limitati  $[a, b]$ .
- (c) Dire se c'è convergenza uniforme su tutto  $\mathbb{R}$ .

*Soluzione.*

(a) Posto

$$f_k(x) = \frac{1}{k + (x - k)^2}$$

osserviamo che  $f_k(x)$  sono funzioni positive, e assumono valore massimo quando il denominatore assume valore minimo, cioè quando  $(x - k)^2 = 0$  ovvero per  $x = k$ . Il valore massimo assunto è

$$M_k = f_k(k) = \frac{1}{k} \quad \text{ed essendo} \quad \sum_k \frac{1}{k} = +\infty$$

concludiamo che la serie data non converge totalmente su tutto  $\mathbb{R}$ .

- (b) Se ci restringiamo all'intervallo  $[a, b]$  la funzione  $f_k(x)$ , per  $k \geq b$  risulta essere crescente su  $[a, b]$  e dunque avrà massimo

$$M_k = f_k(b) = \frac{1}{k + (b - k)^2}.$$

La serie  $\sum_k M_k$  è asintoticamente equivalente alla serie  $\sum_k \frac{1}{k^2}$  e quindi è convergente. Concludiamo quindi che la serie converge totalmente sugli intervalli limitati.

- (c) Perché ci sia convergenza uniforme su  $\mathbb{R}$  deve essere zero il limite seguente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_x \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_x \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k + (x - k)^2}.$$

Si può osservare che valgono le seguenti stime<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k + (x - k)^2} &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{N + (x - k)^2} \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N + j^2} \\ &\leq 2 \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{N + y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{N}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{N}} \right]_{-1}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{N}} \left[ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{N}} \right] \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dunque la serie converge uniformemente su tutto  $\mathbb{R}$ .

3. Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  e tale che

$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla f(x), x) > 0.$$

Dimostrare che il sistema

$$\nabla f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione.

*Soluzione.* Consideriamo la funzione ristretta al cerchio unitario  $D = \{x: |x| \leq 1\}$ . Fissato  $x \in \partial D$  (ovvero  $|x| = 1$ ) consideriamo la funzione  $g(t) = f(tx)$  per  $t \in [0, 1]$ . Osserviamo che si ha  $g'(t) = (\nabla f(tx), x)$  in particolare  $g'(1) = (\nabla f(x), x) > 0$ . Questo significa per qualche  $t < 1$  si ha  $g(t) < g(1)$  ovvero  $f(tx) < f(x)$ . Di conseguenza il punto  $x$  non può essere un punto di minimo per  $f$  su  $D$  e questo è vero per ogni  $x \in \partial D$ . Siccome però la funzione  $f$  è continua su  $D$ , per il teorema di Weierstrass deve esistere un minimo  $x_0 \in D$ . Se  $x_0$  non sta sul bordo  $\partial D$  ne consegue che  $x_0$  è un punto interno e quindi  $\nabla f(x_0) = 0$ . Dunque  $x_0$  è la soluzione cercata. xxx

## Modifiche

**26 novembre 2007** aggiunta una spiegazione nella soluzione del secondo esercizio

<sup>1</sup>Nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto che  $(x - k)^2 \geq [x - k]^2$  e di conseguenza si possono scalare gli indici ponendo  $j = [x - k]$ .