Analisi Matematica IV modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

27 aprile 2006

1. Disegnare approssimativamente nel piano (x, y) l'insieme

$$x^4 - 6xy^2 + y^3 = 0.$$

Calcolare il massimo valore assunto da y su tale insieme.

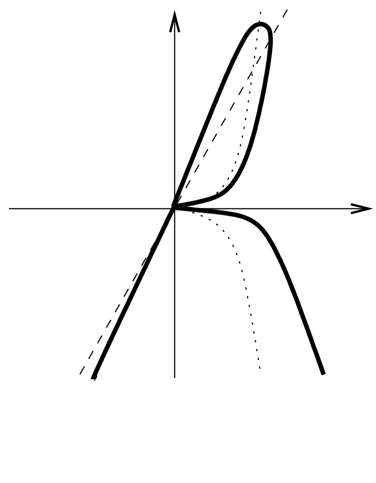
Soluzione. Posto $f(x, y) = x^4 - 6xy^2 + y^3$ si tratta di studiare l'insieme di livello 0 di f. Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali:

$$f_x = 4x^3 - 6y^2$$
$$f_y = -12xy + 3y^2 = 3y(y - 4x)$$

e disegnamo le curve in cui si annullano: $x = \sqrt[3]{3y^2/2}$, $y = 0$ e $y = 4x$ (vedi figura). La derivata f_x risulta essere positiva alla destra della curva di annullamento e negativa a sinistra. La derivata f_y risulta essere positiva sopra le due rette di annullamento e cambia segno nell'attraversare ognuna delle rette. Osserviamo la presenza di due punti critici, il punto $(0, 0)$ e un punto che si trova nel primo quadrante. Osserviamo anche che $f(0, 0) = 0$ e dunque l'insieme di livello passa da $(0, 0)$. Essendo però $(0, 0)$ anche un punto critico, non possiamo applicare il teorema del Dini direttamente in tale punto.

Studiamo ora la monotonia della funzione lungo le curve in cui si annullano le derivate parziali. Sulla curva $x = \sqrt[3]{3y^2/2}$ la funzione f si annulla per $y = 0$, al crescere di y decresce fino a raggiungere un minimo nel punto critico, quindi cresce per $y \to +\infty$. Dallo studio di $f(\sqrt[3]{3y^2/2}, y)$ notiamo anche che f tende a $+\infty$ quando $y \to +\infty$ su tale curva. Lo stesso succede (sempre per $y > 0$) sulla retta $y = 4x$. In effetti il punto critico è un minimo locale per f e in tale punto la funzione è negativa.

Dunque, nel primo quadrante, su entrambe le curve di annullamento delle derivate parziali, c'è un punto (diverso da $(0, 0)$) in cui la funzione si annulla.



Con le informazioni sul segno delle derivate parziali, e utilizzando il teorema del Dini, riusciamo a disegnare la curva di livello che passa da questi due punti. Si capisce che tale curva è una curva chiusa che racchiude il punto critico e passa anche dal punto $(0,0)$. Inoltre nel punto $(0,0)$ tale curva deve avere un "angolo" in quanto è interamente contenuta nel primo quadrante e inoltre il ramo di destra arriva a $(0,0)$ con derivata nulla.

Nel secondo quadrante non ci sono punti dell'insieme di livello. Infatti se $x < 0$ e $y > 0$ si osserva che la funzione $f(x,y) = x^4 + 6|x|y^2 + |y|^3$ risulta essere strettamente positiva.

Consideriamo ora il terzo quadrante. Osserviamo che sulla retta $y = 4x$ la funzione è crescente (e quindi positiva) per x che si allontana da zero, mentre sull'asse delle y la funzione è decrescente (e quindi negativa) al decrescere di y. Tra queste due rette la derivata f_x ha segno negativo e dunque per ogni y fissato c'è un unico punto di annullamento per f. Al di sopra della retta $y = 4x$ invece la funzione è sempre strettamente positiva. Concludiamo dunque che l'insieme di livello $f = 0$ ha, nel terzo quadrante, un unico ramo di curva che parte da $(0,0)$ e rimane al di sotto della retta $y = 4x$ (vedi disegno).

Con un ragionamento analogo si determina un ramo di curva nel quarto quadrante. In questo caso otteniamo anche l'informazione che il ramo di curva del quarto quadrante si collega al punto $(0,0)$ con derivata nulla.

Dal disegno notiamo che effettivamente sull'insieme di livello la variabile y è limitata dall'alto, mentre si potrebbe verificare abbastanza facilmente che y può tendere a $-\infty$ e che x può tendere a $+\infty$ e $-\infty$ sui due rami di curva presenti nel terzo e quarto quadrante.

Per calcolare il valore massimo assunto da y è sufficiente notare che tale valore viene assunto nel punto di intersezione dell'insieme di livello con la curva $f_x = 0$. Dunque si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) = 0 \end{cases}$$

che dà come unica soluzione positiva il valore $y = 3^{19}/2^{10}$.

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

Determinare, in particolare, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione. L'equazione differenziale è omogenea. Si può dunque provare a risolvere mediante la sostituzione

$$z = y/x, \qquad \begin{aligned} y &= xz, \\ y' &= z + xz' \end{aligned}$$

da cui si ottiene il problema di Cauchy in z:

$$\begin{cases} z + xz' = 2z + \frac{1}{z} \\ (-1)z(-1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} xz' = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} \\ z(-1) = -1. \end{cases}$$

Abbiamo ora ottenuto un'equazione a variabili separabili. Possiamo tranquillamente dividere per x e per z in quanto per la buona definizione dell'equazione originaria deve essere $x \neq 0$ e $y \neq 0$. L'equazione diventa dunque

$$\frac{z}{z^2+1} z' = \frac{1}{x}$$

cioè, integrando (ricordiamo che essendo il dato iniziale $x = -1$, stiamo considerando l'intervallo $(-\infty, 0)$ per l'integrale di $1/x$)

$$\frac{1}{2} \log \frac{z^2+1}{=} \log(-x) + c.$$

Sostituendo subito il dato inizilae $x = -1$, $z = -1$ si trova $c = (\log 2)/2 = \log(\sqrt{2})$ e dunque

$$\log \sqrt{z^2+1} = \log(-\sqrt{2}x)$$

cioè

$$z^2 + 1 = 2x^2$$

da cui (essendo $z(-1)$ negativo)

$$z = -\sqrt{2x^2 - 1}.$$

Tornando alla variabile y si ha

$$y = zx = -x\sqrt{2x^2 - 1}.$$

L'espressione appena trovata è ben definita quando $x^2 \leq 1/2$ cioè per $x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [\sqrt{2}/2, +\infty)$. Tuttavia nei punti $\pm\sqrt{2}/2$ la funzione non è derivabile, inoltre l'insieme trovato non è un intervallo. Essendo il dato iniziale $x = -1$, l'intervallo massimale di esistenza è dunque $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$. Su tale intervallo la funzione trovata è l'unica soluzione (per il teorema di esistenza e unicità locale), e tale soluzione non può essere estesa ulteriormente in quanto per $x \to -\sqrt{2}/2$ la derivata tende in modulo ad infinito.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 - xy)\log(x + y^2), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   (a) Disegnare la soluzione massimale nel caso $y_0 = 1$. In particolare mostrare che tale soluzione ha esistenza globale e calcolare i limiti di $y(x)$ per $x \to \pm\infty$.

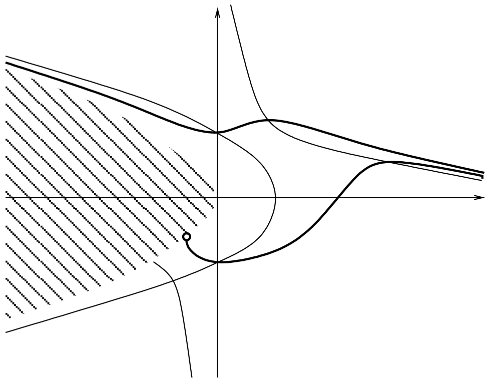
   (b) Sempre nel caso $y_0 = 1$ mostrare che

   $$\lim_{x \to -\infty} y(x) - \sqrt{-x} = 0.$$

   (c) Disegnare la soluzione massimale nel caso $y_0 = -1$. In particolare determinare il numero di punti in cui la soluzione si annulla.

Soluzione. Dallo studio dell'equazione differenziale notiamo che si ha $y' = 0$ sulla parabola $x = 1 - y^2$ e sull'iperbole $y = 1/x$. Inoltre l'equazione non è definita per $x \leq -y^2$ e sulla parabola $x = -y^2$ si ha che y' tende a $\pm\infty$.

Consideriamo innanzitutto la soluzione con la condizione $y(0) = 1$. Dallo studio del segno di y' osserviamo che per $x = 0$ la funzione $y(x)$ ha un punto stazionario ($y'(0) = 0$). Dunque in un intorno destro di $x = 0$ la soluzione sta a destra della parabola $x = 1 - y^2$ mentre in un intorno sinistro la soluzione



rimane a sinistra della parabola. Dunque in 0 la funzione ha un minimo locale. Per $x > 0$ la funzione cresce e necessariamente incontra l'iperbole $xy = 1$ in un punto $x_1 > 0$. In tale punto la funzione ha un massimo locale e in un intorno destro di x_1 è decrescente. Per $x > x_1$ la funzione non può più riattraversare l'iperbole in quanto se attraversasse dall'alto verso il basso, la sua derivata dovrebbe essere negativa (minore della pendenza dell'iperbole). Ma in un ipotetico punto di attraversamento l'equazione ci dice che la derivata dovrebbe invece essere nulla. Dunque la funzione è definita globalmente per $x > 0$ e per $x > x_1$ è monotona decrescente. Di conseguenza esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \ell.$$

Osserviamo ora che se fosse $\ell \neq 0$ per l'Hôpital si avrebbe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - xy(x)) \log(x + y(x)^2) = -\infty$$

che è impossibile visto che $y(x)$ ha un asintoto orizzontale. Concludiamo quindi che $\ell = 0^+$ ovvero che la funzione $y(x)$, per $x \to +\infty$ tende a 0^+.

Consideriamo ora il caso $x < 0$. In un intorno sinistro di 0 la funzione risulta essere decrescente. Inoltre non può attraversare la parabola $x = 1 - y^2$ in quanto in un eventuale attraversamento dall'alto verso il basso si dovrebbe avere $y' < 0$ mentre su tale parabola si ha necessariamente $y' = 0$. Similmente la soluzione non può neanche tendere alla parabola $x = -y^2$ in quanto in un intorno dell'ipotetico punto dove $-y^2(x) \to x$ si dovrebbe avere $y'(x)$ maggiore della pendenza della parabola mentre dall'equazione si nota che abbiamo $y'(x) \to -\infty$ su tale parabola. Dunque la soluzione $y(x)$ è costretta tra le due parabole e di conseguenza ha esistenza globale anche per $x < 0$. Inoltre essendo

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} - \sqrt{-x} = 0$$

deduciamo che anche

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) - \sqrt{-x} = 0$$

e in particolare $y \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

Consideriamo ora la condizione iniziale $y(0) = -1$. In questo caso nel punto $x = 0$ la funzione ha un minimo locale. Per $x < 0$ la funzione è decrescente e quindi non potrà incontrare l'iperbole $xy = 1$ né tantomeno la parabola $x = 1 - y^2$. Dunque necessariamente la funzione convergerà ad punto sulla frontiera dell'insieme di definizione dell'equazione, ovvero alla curva $x = -y^2$.

In un intorno destro di 0 la funzione risulta invece essere crescente. Vogliamo dimostrare che la funzione attraversa l'asse $y = 0$. Se infatti per assurdo la funzione rimanesse sempre negativa, dovrebbe avere un asintoto orizzontale. Ma, per quanto visto prima, l'unica possibilità per avere un asintoto orizzontale è che $y \to 0^+$. Dunque la funzione deve diventare positiva. Di conseguenza la funzione deve anche attraversare l'iperbole $xy = 1$ in un punto $x_2 > x_1$ in cui assume valore massimo e quindi diventa decrescente e tende a 0^+ rimanendo sopra l'iperbole $xy = 1$. Abbiamo quindi verificato che la funzione si annulla in esattamente un punto.