

Analisi Matematica III e IV modulo

Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

7 luglio 2006

1. Dire se la funzione

$$f(x, y) = x^6 - x^3y^5 + y^{10}$$

ha un massimo o minimo, relativo o assoluto nel punto $(0, 0)$.

2. (a) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

- (b) Dimostrare che vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in (-1, 1).$$

3. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{2y e^{x^2}} + xy$$

4. Si consideri il semicerchio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$.

- (a) Calcolare il baricentro (\bar{x}, \bar{y}) di D :

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dx dy}{m(D)}$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx dy}{m(D)}$$

($m(D)$ indica la misura del dominio D).

- (b) Sia $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la mappa $T(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Calcolare la misura dell'insieme $T(D)$.