Analisi Matematica III e IV modulo
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

7 luglio 2006

1. Dire se la funzione
$$f(x,y) = x^6 - x^3y^5 + y^{10}$$
ha un massimo o minimo, relativo o assoluto nel punto $(0,0)$.

   Soluzione. È sufficiente calcolare una derivata parziale
$$f_x(x,y) = 6x^5 - 3x^2y^5 = 3x^2(2x^3 - y^5)$$
per verificare che fissato y la funzione $x \mapsto f(x,y)$ ha un minimo assoluto (stretto) sulla curva $2x^3 = y^5$. Considerando poi la funzione f ristretta a tale curva: $y \mapsto f(\sqrt[3]{y^5/2}, y) = y^{10}/4 - y^{10}/2 + y^{10} = 3y^{10}/4$ si scopre che per $y = 0$ tale funzione ha un minimo assoluto (stretto). Dunque per ogni punto (x,y) si ha $f(x,y) \geq f(\sqrt[3]{y^5/2}, y) \geq f(0,0)$. Dunque $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto per f su tutto $\mathbb{R}^2$ (ed è l'unico punto critico di f).

   Soluzione alternativa. Posto $g(x,y) = x^2 - xy + y^2$ è facile verificare che g ha un minimo assoluto stretto in 0 (g è una forma quadratica). Essendo $f(x,y) = g(x^3, y^5)$ la stessa proprietà vale per f.

2. (a) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

   (b) Dimostrare che vale
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x \qquad \forall x \in (-1,1).$$

   Soluzione. L'eguaglianza (a) vale per ogni $x \in (-1,1)$ in quanto a primo membro non c'è altro che la serie geometrica di ragione $q = -x^2$ mentre a secondo membro troviamo $1/(1-q)$ che è proprio la somma di tale serie se (e solo se) $|q| < 1$. Inoltre osserviamo che abbiamo a che fare con una serie di potenze con raggio di convergenza $R = 1$, dunque la serie converge totalmente e uniformemente su tutti gli intervalli $[-r, r]$ con $r < 1$.

Per quanto riguarda la serie in (b) osserviamo che derivando termine a termine si ottiene la serie in (a). Fissato un intervallo $[-r, r] \subset (-1, 1)$, la serie in (a) converge uniformemente, inoltre la serie in (b) converge puntualmente per $x = 0$. Dunque, per il teorema sulla derivazione per serie, possiamo affermare che la serie (b) converge uniformemente sull'intervallo $[-r, r]$ e la sua somma ha come derivata $1/(1 + x^2)$. Dunque la somma della serie in (b) è $\operatorname{arctg} x + c$ per qualche costante c. Notando poi che per $x = 0$ la somma è zero, si deduce $c = 0$ e dunque l'uguaglianza in (b) è dimostrata.

3. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{2y\, e^{x^2}} + xy$$

Soluzione. Si tratta di una equazione di Lagrange, definita per $y \neq 0$. Moltiplicando tutto per $2y$ si ottiene

$$2yy' = xe^{-x^2} + 2xy^2$$

ponendo poi $z = y^2$ si ha

$$z' = xe^{-x^2} + 2xz$$

che è una equazione lineare in z:

$$z' - 2xz = xe^{-x^2}$$

moltiplichiamo tutto per e^{-x^2} per ottenere

$$z'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}z = xe^{-2x^2}$$

cioè

$$(ze^{-x^2})' = -\frac{1}{2}(e^{-2x^2})'.$$

Da

$$-2ze^{-x^2} = e^{-2x^2} + c.$$

si ottiene dunque

$$y^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}ce^{x^2}$$

ovvero posto $C = -\frac{1}{2}c$

$$y = \pm\sqrt{Ce^{x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}}.$$

4. Si consideri il semicerchio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$.

   (a) Calcolare il baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$ di D:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dxdy}{m(D)}$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,dxdy}{m(D)}$$

   ($m(D)$ indica la misura del dominio D).

   (b) Sia $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la mappa $T(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Calcolare la misura dell'insieme $T(D)$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che per questioni di simmetria si deve avere $\bar{y} = 0$.

Per quanto riguarda $\bar{x}$, sappiamo che $m(D) = \pi/2$ in quanto è l'area di mezzo cerchio di raggio 1. Calcoliamo quindi $\bar{x}$ passando in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dxdy = \rho\,d\rho d\theta$, $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\rho \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dxdy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho(\cos\theta)\rho\,d\rho d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} [\rho^3/3]_0^1 \cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}[\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Dunque si ottiene $\bar{x} = -\frac{4}{3}\pi$.

Per quanto riguarda il punto (b) osserviamo innanzitutto che la mappa T è iniettiva per $x < 0$ e $y \in (-\pi, \pi)$. Applicando la formula del cambio di variabili per $(\xi, \eta) = T(x, y)$, $d\xi\,d\eta = |\det DT(x, y)|\,dx\,dy$

$$m(T(D)) = \iint_{T(D)} d\xi\,d\eta = \iint_D |x|\,dx\,dy = -\iint_D x\,dx\,dy = \frac{2}{3}.$$