Analisi Matematica I e II modulo
Prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

24 settembre 2007

1. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \cos^n(1/n).$$

2. Sia $f(x)$ una funzione tale che
$$0 \leq f(x) \leq |x| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
Dimostrare che la funzione $g(x) = xf(x)$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ e calcolare il valore della derivata $g'(x_0)$.

3. Dimostrare che
$$\log(1+x^2) \leq \operatorname{arctg} x$$
per ogni $x \in [0, 1/2]$.

4. Verificare che la funzione
$$f(x) = \log(1 + x + e^x)$$
ammette almeno un punto di flesso.

5. Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{\cos x})^2 \tan x \, dx.$$

6. Si consideri la serie numerica
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{1 - \cos\frac{1}{k}\right\}^{\alpha}.$$
Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie risulta convergente. Determinare inoltre per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie risulta assolutamente convergente.