Programma del corso di Analisi Funzionale

CdL Matematica, a.a. 2008-2009

30 ottobre 2024

Spazi vettoriali. Basi algebriche. Lemma di Zorn. Spazi vettoriali normati. Esempi: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ℓ^∞, c_0, ℓ^p, c_c. Teorema di Hahn-Banach.

Caratterizzazione della continuità di una applicazione lineare tra spazi vettoriali normati. Spazio $\mathcal{L}(E, F)$ delle applicazioni lineari e continue tra spazi normati. Spazi di Banach. $\mathcal{L}(E, F)$ è uno spazio vettoriale normato ed è completo se F è completo. Spazio duale $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Ogni applicazione lineare definita su un sottospazio di uno s.v.n. si estende a tutto lo spazio mantenendone la norma. Per ogni punto $x_0 \in E$ esiste $f_0 \in E'$ tale che $\|f_0\| = \|x_0\|$ e $f_0(x_0) = \|f_0\| \, \|x_0\|$. Si ha $\|x\| = \max\{|f(x)| \colon \|f\| \leq 1\}$.

Il funzionale f è continuo se e solo se $\{f = \alpha\}$ è chiuso. Giogo di un convesso. Separazione di un convesso aperto da un punto. Teorema di Hahn-Banach: prima forma geometrica (separazione tra convessi aperti disgiunti). Teorema di Hahn-Banach: seconda forma geometrica (stretta separazione tra un convesso chiuso e un convesso compatto). Un sottospazio vettoriale di uno spazio s.v.n. è denso se e solo se ogni funzionale continuo che si annulla sul sottospazio si annulla su tutto lo spazio.

Funzioni semicontinue inferiormente e loro proprietà. Teoria delle funzioni convesse coniugate. Se φ è convessa, semicontinua inferiormente e $\varphi \neq +\infty$ allora $\varphi^* \neq +\infty$. Teorema di Fenchel-Moreau: $\varphi^{**} = \varphi$ se φ è convessa e semicontinua. Teorema di dualità:

$$\inf_{x \in E} \varphi(x) + \psi(x) = \max_{f \in E'} -\varphi^*(-f) - \psi^*(f)$$

se esiste $x_0 \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ tale che φ sia continua in x_0.

Lemma di Baire. Teorema di Banach-Steinhaus. Teorema dell'applicazione aperta. Teorema del grafico chiuso.

La topologia meno fine che rende continue le funzioni di una famiglia arbitraria. Definizione di topologia debole $\sigma(E, E')$. La topologia debole è T_2. Proprietà delle successioni convergenti debolmente (Proposizione III.5 sul Brezis). Se E ha dimensione finita la topologia debole coincide con la topologia forte.

Gli spazi ℓ_p. Esponente coniugato. Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Hölder. Lo spazio duale di ℓ_p è $\ell_{p'}$ per $p \in [1, \infty)$. Esempi sugli spazi ℓ_p. Vale $e_k \rightharpoonup 0$ se $p \in (1, \infty)$. In ℓ_1 si ha $x_k \to x$ se e solo se $x_k \rightharpoonup x$.

La sfera unitaria di uno spazio di Banach di dimensione infinita non è debolmente chiusa. Un insieme convesso è chiuso se e solo se è debolmente chiuso. Una funzione convessa e semicontinua inferiormente è anche debolmente semicontinua inferiormente. Un'applicazione lineare $T\colon E \to F$ è continua rispetto alle topologie forti se e solo se è continua tra le topologie deboli.

La topologia "debole star", $\sigma(E', E)$. L'inclusione canonica nel biduale: $J\colon \ : E \to E''$. La topologia debole star è di Hausdorff. Base di intorni per la topologia debole star. Proprietà della convergenza $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Rappresentazione di applicazioni lineari e continue rispetto alla topologia debole star (Proposizione III.13 e Corollario III.14 sul Brezis).

Se X è compatto e di Hausdorff, allora ogni compatto in X può essere separato da un punto esterno tramite aperti. Se X è compatto e di Hausdorff allora ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi. Passaggio dai ricoprimenti aperti alle famiglie chiuse con la proprietà dell'intersezione finita (PIF). Definizione equivalente di compattezza tramite PIF. Esistenza dell'estensione massimale di una famiglia con la proprietà PIF. Proprietà delle famiglie $\mathcal{M}$ massimali di chiusi con la proprietà PIF: $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$, $A \cap X \neq \emptyset \forall X \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$. Topologia prodotto. Teorema di Tychonov. Teorema di Banach-Alaoglu.

Spazi di Banach riflessivi. Lemma di Goldstine: $J(\bar{B}_E)$ è denso in E'' rispetto alla topologia debole-*. Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se la palla unitaria è $\sigma(E, E')$-compatta. Un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach riflessivo è riflessivo. Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se il suo duale lo è. Un convesso chiuso e limitato in uno spazio di Banach riflessivo è debolmente compatto. Ogni funzione convessa semicontinua inferiormente e coerciva su uno spazio di Banach riflessivo ammette minimo.

Spazi separabili. Se il duale è separabile anche lo spazio è separabile. Uno spazio è riflessivo e separabile se e solo se il duale lo è. La topologia debole-* della palla unitaria del duale di uno spazio separabile è metrizzabile. Se la topologia debole-* della palla duale è metrizzabile lo spazio è separabile. Una successione limitata nel duale di uno spazio separabile ammette un'estratta convergente per la topologia debole-*. Una successione limitata in uno spazio di Banach riflessivo ammette un'estratta debolmente convergente.

Spazi uniformemente convessi. Uno spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo. Se una successione converge debolmente in uno spazio uniformemente convesso e la norma della successione converge alla norma del limite allora la successione converge fortemente. Spazi di Hilbert. Uno spazio di Hilbert è uniformemente convesso.

Operatori non-limitati. Operatori non-limitati limitati. Operatori non-limitati chiusi. Operatori massimali monotoni (capitolo VII del Brezis). Proprietà degli operatori massimali monotoni (dominio denso, chiusura, esistenza e limitatezza dell'inverso di $I + \lambda A$). Risolvente e regolarizzata di Yosida. Proprietà di approssimazione dell'operatore tramite regolarizzato di Yosida. Teorema di esistenza e unicità di Cauchy, Lipschitz, Picard. Il teorema di Hille-Yosida, esistenza e regolarità delle soluzioni.