Analisi Matematica 1
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

15 giugno 2009

1. Sia a_n la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$ *A******

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$ *B******

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}(a_n - a_n^3), \\ a_1 = \frac{6}{5}. \end{cases}$$ *C******

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$ *D******

Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Soluzione. Vediamo la soluzione per la variante A. La successione soddisfa l'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ con

$$f(x) = \frac{3}{2}x - x^3 = x(\frac{3}{2} - x^2).$$

I punti fissi, cioè le soluzioni di $f(x) = x$ sono i punti 0 e $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Inoltre osserviamo che i punti $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono anche i punti in cui la derivata di f cambia segno. Consideriamo l'intervallo aperto $I = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Osserviamo che su I la funzione f è strettamente crescente e che gli estremi dell'intervallo sono punti fissi di f. Dunque si ha $f(I) = I$ e di conseguenza se la successione entra nell'intervallo I, allora vi rimane definitivamente. In effetti possiamo verificare che

$$a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_2 = -\frac{9}{8}, \qquad a_3 = -\frac{135}{512}$$

ed essendo $a_3 \in I$ abbiamo $a_n \in I$ per ogni $n \geq 3$.

Inoltre nell'intervallo I si ha $f(x) < x$ dunque la successione a_n risulta essere strettamente decrescente per $n \geq 3$. Di conseguenza a_n ammette limite ℓ. Visto che f è continua ℓ deve essere un punto fisso di f ma siccome $a_3 < 0$ e $a_n < a_3$ l'unica possibilità è $\ell = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nella variante B tutti i segni sono invertiti, e il limite è quindi $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La variante C è analoga alla A. Il limite risulta essere $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

La variante D è analoga alla A. Il limite risulta essere $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} x^n$$ **A*****

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2} x^n$$ **B*****

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2} x^n$$ **C*****

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} x^n$$ **D*****

Soluzione. Consideriamo la variante A. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto. Se a_n è il termine generico della nostra serie, si ha:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+3}{(n+1)^2} \frac{n^2}{n+2} |x| \to |x| \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Se $|x| > 1$, applicando il criterio del rapporto per le successioni, si trova $|a_n| \to \infty$ e dunque a_n non è infinitesimo e la serie non converge. Se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e dunque converge.

Nel caso $x = 1$ si verifica che $a_n \sim \frac{1}{n}$ e dunque la serie diverge. Nel caso $x = -1$ osserviamo che $|a_n| = \frac{n+2}{n^2}$ è decrescente e infinitesima (la monotonia si può verificare studiando la derivata della funzione $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$). Dunque si può applicare il criterio di convergenza per le serie alternate per ottenere che la serie converge (ma non converge assolutamente).

Nella variante B si può raccogliere un segno *meno* e poi applicare lo stesso procedimento del caso A. I risultati sono gli stessi.

Nelle varianti C e D si applica lo stesso metodo e si ottiene lo stesso risultato della variante A.

3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sin^2 x + \cos(x^2) - x^2\right)^3 - 1}{x^\alpha \log(1+x)}.$$ ******A**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\tan^2 x + \cos(x^2) - x^2\right)^3 - 1}{x \log(1+x^\alpha)}.$$ ******B**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\tan^2 x + e^{(x^4)} - x^2\right)^3 - 1}{x^\alpha \log(1+x^2)}.$$ ******C**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sin^2 x + e^{(x^4)} - x^2\right)^3 - 1}{x^2 \log(1+x^\alpha)}.$$ ******D**

Soluzione. Consideriamo la variante A. Utilizziamo gli sviluppi:

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$
$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$
$$\log(1+x) = 1 + x + o(x).$$

Da cui:

$$(\sin^2 x + \cos(x^2) - x^2)^3 - 1 = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + 1 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1$$
$$= \left(1 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)\right)^3 - 1 = 1 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4) - 1 = -\frac{5}{2}x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$\frac{-\frac{5}{2}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha(x + o(x))} = \frac{-\frac{5}{2} + o(1)}{x^{\alpha-3} + o(x^{\alpha-3})}.$$

In conclusione vediamo che se $\alpha = 3$ il limite vale $-\frac{5}{2}$, se $\alpha > 3$ il limite è $-\infty$ e se $\alpha < 3$ il limite è 0.

Nel caso `B` utilizzeremo anche lo sviluppo:

$$\tan^2 x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Da cui, per $\alpha > 0$:

$$\frac{\left(x^3 + \frac{2}{3}x^4 + 1 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x(x^\alpha + o(x^\alpha))} = \frac{\left(1 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})}$$
$$= \frac{1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{x^{\alpha-3} + o(x^{\alpha-3})}.$$

In conclusione se $\alpha = 3$ il limite vale $\frac{1}{2}$, se $\alpha > 3$ il limite vale $+\infty$ e se $0 < \alpha < 3$ il limite vale 0. Se $\alpha \leq 0$ a maggior ragione il limite è zero, in quanto $\log(1 + x^\alpha) \geq \log(2)$.

Nel caso `C` utilizzamo anche lo sviluppo

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4).$$

Da cui

$$\frac{\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + 1 + x^4 - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^\alpha(x^2 + o(x^2))} = \frac{\left(1 + \frac{5}{3}x^4 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})}$$
$$= \frac{1 + 5x^4 + o(x^4) - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \frac{5 + o(1)}{x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})}.$$

In conclusione se $\alpha = 2$ il limite è 5, se $\alpha > 2$ il limite è $+\infty$ e se $\alpha < 2$ il limite è 0.

Nel caso `D` si ha per $\alpha > 0$:

$$\frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + 1 + x^4 - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^2(x^\alpha + o(x^\alpha))} = \frac{\left(1 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})}$$
$$= \frac{1 + 2x^4 + o(x^4) - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \frac{2 + o(1)}{x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})}.$$

In conclusione se $\alpha = 2$ il limite vale 2, se $\alpha > 2$ il limite vale $+\infty$ e se $\alpha < 2$ il limite vale 0 (il caso $\alpha \leq 0$ si tratta come in `B`).

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\boxed{\texttt{******A*}}$ $\boxed{\texttt{******C*}}$

$$\frac{\pi}{4} + \log(x^3 - x) = \operatorname{arctg} x.$$

$$\frac{\pi}{4} + \log(x - x^3) + \operatorname{arctg} x = 0.$$

$\boxed{\texttt{******B*}}$ $\boxed{\texttt{******D*}}$

Soluzione. Nei casi `A` e `C` le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \log(x^3 - x) - \operatorname{arctg} x.$$

Il dominio di esistenza è dato da $x^3 - x > 0$ cioè dagli intervalli $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Il limite della funzione nei punti -1, 0 e 1 è $-\infty$ mentre per $x \to +\infty$ il limite è $+\infty$.

Studiamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{(x^3 - x)(1 + x^2)}$$

in particolare ci interessa il segno del numeratore

$$g(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

Si ha

$$g'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 4x + 1,$$
$$g''(x) = 36x^2 - 6x + 4.$$

È facile verificare che $g''(x) > 0$ per ogni x, dunque g' è strettamente crescente. Inoltre $g'(-1) < 0$ e $g'(0) > 0$, dunque esiste un (unico) punto $x_1 \in (-1, 0)$ tale che $g'(x_1) = 0$ e $g'(x) < 0$ per $x < x_1$ e $g'(x) > 0$ per $x > x_1$. Questo significa che g è decrescente in $(-1, x_1]$ e crescente in $[x_1, 0)$ e anche in $(1, +\infty)$. Osserviamo che $g(-1) > 0$, $g(0) < 0$ e $g(1) > 0$. Dunque in x_1 la funzione g ha un minimo con valore negativo. Esiste dunque un punto $x_2 \in (-1, x_1)$ in cui $g(x_2) = 0$ e $g(x) > 0$ per $x < x_2$ e $g(x) < 0$ per $x \in (x_2, -1)$. Per $x > 1$ si ha $g(x) > 0$.

La funzione f' ha lo stesso segno di g sul suo insieme di definizione. Sull'intervallo $(1, +\infty)$ la funzione f risulta quindi continua e strettamente crescente. Siccome agli estremi dell'intervallo i limiti hanno segno diverso, concludiamo che in $(1, +\infty)$ c'è un unico zero della funzione f.

Dunque il punto sta nel capire qual è il segno di $g(x_2)$ in quanto se fosse $g(x_2) > 0$ avremmo altre due soluzioni, mentre se fosse $g(x_2) < 0$ non ci sarebbero altre soluzioni.

Per dimostrare che in effetti $g(x_2) > 0$ è sufficiente trovare un qualunque valore $x \in (-1, 0)$ tale che $g(x) > 0$. Una possibile scelta è $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ che è il punto in cui $\log(x^3 - x)$ ha massimo e per il quale sappiamo valutare l'arcotangente. Per tale valore si può verificare che $g(x) > 0$.

In conclusione abbiamo tre soluzioni distinte di cui due comprese tra -1 e 0 e una maggiore di 1.

Nei casi `B` e `D` si ottengono gli stessi risultati con i segni della variabile x invertiti.

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt$$
definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.

   (a) Dimostrare che f, f' e f'' sono definite e positive in ogni punto del dominio di f (cioè per $x > 0$ e $x \neq 1$).

   (b) Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (c) Dimostrare che $\lim_{x\to 1} f(x) - f(1/x) = 0$.

   (d) Dimostrare che la funzione f può essere estesa per continuità nel punto $x = 1$.

Soluzione. Se $x > 1$ la funzione integranda è positiva e gli estremi di integrazione sono ordinati $x < x^2$. Dunque l'integrale è positivo. Se $x < 1$ la funzione integranda è negativa ma gli estremi di integrazione sono scambiati: $x^2 < x$. Dunque l'integrale è comunque positivo. Questo significa che $f(x) > 0$ per ogni x nel suo dominio.

La funzione $\frac{1}{\log t}$, essendo continua, ammette un primitiva, in base al teorema fondamentale del calcolo. Sia $F(x)$ una qualunque primitiva. Si ha dunque
$$f(x) = F(x^2) - F(x), \qquad F'(x) = \frac{1}{\log x}$$
da cui
$$f'(x) = \frac{2x}{\log x^2} - \frac{1}{\log x} = \frac{x-1}{\log x}.$$
È facile verificare che $f'(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f. Derivando ulteriormente si ha:
$$f''(x) = \frac{\log x - (x-1)/x}{\log^2 x} = \frac{x\log x - x + 1}{x\log^2 x}.$$
Per studiare il segno di $f''(x)$ poniamo:
$$g(x) = x\log x - x + 1$$
si ha dunque
$$g'(x) = \log x$$
che è positivo per $x > 1$. Dunque la funzione g è decrescente per $x < 1$ e crescente per $x > 1$. Per $x \to 1$ la funzione tende a 0 e dunque osserviamo che $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$, $x \neq 1$. Questo ci permette di concludere che anche $f''(x) > 0$ sul dominio di f.

Veniamo ora al quesito (b). Per $t \to 0^+$ notiamo che la funzione $1/\log t$ ammette limite 0 e dunque può essere estesa per continuità al valore $t = 0$. Di conseguenza possiamo supporre che anche F sia definita anche per $x = 0$. Essendo inoltre F continua, si ha che
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x^2) - F(x) = F(0) - F(0) = 0.$$
Per quanto riguarda il limite per $x \to +\infty$ osserviamo che la funzione $1/\log t$ risulta essere decrescente. Dunque si ha:
$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\log x^2}\, dt = \frac{1}{2\log x}(x^2 - x) \to +\infty$$

per $x \to +\infty$.

Per quanto riguarda il punto (c), utilizziamo il cambio di variabili $t = 1/s$, $dt = -1/s^2\, ds$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(1/x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt - \int_x^{x^2} \frac{-1}{s^2 \log \frac{1}{s}}\, ds \\ &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t} - \frac{1}{t^2 \log t}\, dt \\ &= \int_x^{x^2} \frac{t^2 - 1}{t^2 \log t}\, dt \end{aligned}$$

ora siccome la funzione integranda ammette limite finito per $t \to 1$, la funzione integrale è continua e l'integrale di estremi x e x^2 converge a 0 quando $x^2 - x \to 0$.

Per quanto riguarda il punto (d) basta osservare che la funzione f è strettamente crescente per quanto visto al punto (a). Dunque i limiti destro e sinistro per $x \to 1$ esistono entrambi. Ma facendo il cambio di variabili $x \mapsto 1/x$ si osserva che il limite destro di $f(x)$ è uguale al limite sinistro di $f(1/x)$. Dunque per quanto visto al punto (c) i due limiti sono uguali.