Analisi Matematica 1
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 - \cos a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha. \end{cases}$$
`*A******`

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 + \cos a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha. \end{cases}$$
`*B******`

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 + \sin a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
`*C******`

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 + \sin a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
`*D******`

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Soluzione. Consideriamo la variante `A`. Posto $f(x) = x+1-\cos x$ la successione è definita per ricorrenza dalla relazione $a_{n+1} = f(a_n)$. I punti fissi di f, ovvero le soluzioni di $f(x) = x$ sono dati da $x_k = 2k\pi$ con k intero. La relazione $f(x) \geq x$ è equivalente a $\cos x \leq 1$ e dunque è verificata per ogni x. Di conseguenza la successione a_n è monotona crescente. Osserviamo che si ha $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ per ogni x, dunque f è monotona. Di conseguenza è facile verificare che gli intervalli $I_k = (2k\pi - 2\pi, 2k\pi]$ sono invarianti per f visto che gli estremi sono punti fissi e la funzione è monotona.

Posto $k = \lceil\alpha\rceil$ (l'approssimazione intera per eccesso di α) si ha $k-1 < \alpha \leq k$ e dunque $a_1 \in I_k$. Essendo I_k invariante deduciamo che $a_n \in I_k$ per ogni n. Di conseguenza a_n è limitata ed essendo anche monotona risulta essere convergente. Essendo f continua il limite della successione deve essere un punto fisso di f. Visto che a_n è crescente l'unica possibilità è che il limite sia l'estremo destro dell'intervallo I_k. Dunque $\lim a_n = 2\pi\lceil\alpha\rceil$.

Nella variante `B` si procede in modo analogo. La successione a_n risulta essere decrescente. Si considerano gli intervalli invarianti $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ e si sceglie $k = \lfloor\alpha\rfloor$. Il limite risulta quindi essere $\lim a_n = 2\pi\lfloor\alpha\rfloor$.

Nella variante `C` la successione risulta essere crescente. Si considerano gli intervalli invarianti $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2]$. Si ottiene $\lim a_n = 2\pi\lceil\alpha + 1/2\rceil + 3\pi/2$.

Nella variante `D` la successione risulta essere decrescente. Si considerano gli intervalli invarianti $[\pi/2 + 2k\pi, 5\pi/2 + 2k\pi)$. Si ottiene $\lim a_n = \pi/2 + 2\pi\lfloor\alpha - 1/2\rfloor$

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\log(1+x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

Soluzione. Dobbiamo determinare i valori di α per i quali la funzione

$$f(x) = 2\log(1+x^2) - \alpha x^2 + x^4.$$

non risulta mai essere negativa. Visto che $f(0) = 0$ questa condizione è equivalente a richiedere che il punto $x = 0$ sia un minimo assoluto per la funzione. Osseviamo che si ha

$$f'(x) = \frac{4x}{1+x^2} - 2\alpha x + 4x^3 = \frac{2x}{1+x^2}(2x^4 + (2-\alpha)x^2 + (2-\alpha)).$$

Risulta quindi evidente che se $2-\alpha \geq 0$ il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di x. Dunque in tal caso la funzione risulta essere crescente per $x \geq 0$ e decrescente per $x \leq 0$. Di conseguenza il punto $x = 0$ sarebbe un minimo assoluto per f e dunque $f(x) \geq f(0) = 0$ per ogni x. Abbiamo dunque dimostrato che se $\alpha \leq 2$ vale la proprietà richiesta.

Vogliamo ora mostrare che se $\alpha > 2$ tale proprietà non vale, cioè esistono dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) < 0$. Osserviamo che se $\alpha > 2$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\log(1+x^2)}{x^2} - \alpha + x^2 = 2 - \alpha < 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno esistono dei valori di x per i quali $f(x)/x^2 < 0$ e dunque $f(x) < 0$.

Dunque la proprietà richiesta vale se, e solo se $\alpha \leq 2$.

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x - e^x + x^2.$$ **A*****

$$f(x) = e^x - \sin x - \cos x - x^2.$$ **B*****

$$f(x) = \sin x - \cos x - e^x + 2.$$ **C*****

$$f(x) = e^x + \cos x - \sin x - 2.$$ **D*****

Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x nell'intervallo $(-\delta, 0)$ si ha $f(x) > 0$ (`A`,`C`) o $f(x) < 0$ (`B`,`D`).

Soluzione. . Nelle varianti `A` e `C` lo sviluppo di Taylor di f è

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = -x^3\left(\frac{1}{3} + o(1)\right).$$

Per la definizione di limite esiste $\delta > 0$ tale che $1/3 + o(1) > 0$ per ogni $|x| < \delta$. Dunque se $x < 0$ e $|x| < \delta$ si ha $f(x) > 0$.

Le varianti `B` e `D` sono analoghe, ma con i segni cambiati.

4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^n)^n + n^{(2^n)}}{2^{(n!)} + (n!)^2}.$$ *****A**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (n^n)^n}{n^{(2^n)} + 2^{(n!)}}.$$ `*****B**`

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (n^n)^n}{2^{(n!)} + n^{(2^n)}}.$$ `*****C**`

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(2^n)} + (n!)^2}{(n^n)^n + 2^{(n!)}}.$$ `*****D**`

Soluzione. Osserviamo innazitutto che valgono le seguenti relazioni:

$$(n!)^2 \ll (n^n)^n \ll n^{(2^n)} \ll 2^{(n!)}.$$

Infatti per $n \to \infty$ si ha

$$\frac{(n!)^2}{(n^n)^n} \le \frac{(n^n)^2}{n^{(n^2)}} = e^{2n\log n - n^2 \log n} \to 0$$

essendo $2n \ll n^2$. Mentre

$$\frac{(n^n)^n}{n^{(2^n)}} = e^{n^2 \log n - 2^n \log n} \to 0$$

essendo $n^2 \ll 2^n$. Infine

$$\frac{n^{(2^n)}}{2^{(n!)}} = e^{2^n \log n - n! \log 2} = e^{n2^n\left(\frac{\log n}{n} - \frac{(n-1)!}{2^{n-1}}\frac{\log 2}{2}\right)} \to 0$$

essendo $\log n \ll n$ e $2^n \ll n!$.

Dunque le serie delle varianti `A`, `B`, `C` e `D` sono asintoticamente equivalenti alle serie

$$\sum_n \frac{n^{(2^n)}}{2^{(n!)}}, \qquad \sum_n \frac{(n^n)^n}{2^{(n!)}}, \qquad \sum_n \frac{(n^n)^n}{2^{(n!)}}, \qquad \sum_n \frac{n^{(2^n)}}{2^{(n!)}}.$$

Osserviamo quindi che i casi `B` e `C` sono uguali e che i casi `A` e `D` si riconducono ad essi. Basterà dunque risolvere la variante `B`. Mostreremo che

$$\frac{n^{(2^n)}}{2^{(n!)}} \ll \frac{1}{n^2}$$

cioè che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 n^{(2^n)}}{2^{(n!)}} = 0.$$

Si ha

$$\frac{n^2 n^{(2^n)}}{2^{(n!)}} = e^{(2+2^n)\log n - n!\log 2} = e^{(2+2^n)\log n\left(1 - \frac{n!\log 2}{(2+2^n)\log n}\right)}$$

e, d'altra parte

$$\frac{n!\log 2}{(2+2^n)\log n} = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} \cdot \frac{n}{\log n} \cdot \frac{\log 2}{\frac{1}{2^{n-2}} + 2} \to +\infty$$

per $n \to \infty$. Dunque l'esponente dell'esponenziale tende a $-\infty$ e il limite risulta effettivamente essere 0.

5. Si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}}\, dx.$$

(a) mostrare che l'integrale è finito;

(b) calcolarne il valore.

Soluzione. Osserviamo che vale

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

e consideriamo quindi separatamente i due integrali impropri:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx.$$

Il primo integrale si calcola esplicitamente, infatti $1/\sqrt[3]{x} = x^{-\frac{1}{3}}$ e dunque

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_a^{2\pi} = \frac{3}{2}(2\pi)^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2}}.$$

In particolare questo primo integrale improprio converge.

Consideriamo ora il secondo integrale improprio, ovvero:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx.$$

La funzione integranda non è definita nei tre punti 0, π e 2π appartenenti all'intervallo $[0, 2\pi]$. Per $x \to 0^+$ osserviamo che si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x}{\sin x}} = 1.$$

Dunque in un intorno del punto $x = 0$, il secondo integrale ha lo stesso comportamento del primo, cioè converge. Nei punti $x = \pi$, e $x = 2\pi$, sfruttando le proprietà $\sin(\pi + x) = \sin(2\pi - x) = -\sin x$ si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\pi - x}} \quad \text{per } x \to \pi^{\pm}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x - 2\pi}} \quad \text{per } x \to 2\pi^{-}.$$

Dunque anche negli intorni destro e sinistro di $x = \pi$ e nell'intorno sinistro di $x = 2\pi$ la funzione ha integrale finito. Di conseguenza l'integrale di partenza è esso stesso finito.

Osserviamo infine che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx = 0$$

in quanto stiamo integrando una funzione dispari su un intervallo simmetrico. Dunque possiamo concludere che il valore dell'integrale cercato è

$$3\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2}}.$$