Analisi Matematica 2
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

8 aprile 2010

1. Risolvere l'equazione differenziale
$$y'(1+\tan^2 y) = 1$$
con la condizione $y(0) = \pi$.

   Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separate. Si tratta di osservare che una primitiva di $1 + \tan^2 y$ è $\tan y$, dunque
$$(\tan y)' = y'(1+\tan^2 y) = 1$$
da cui
$$\tan y = x + c.$$
Dalla condizione $y(0) = \pi$ si trova $\tan y(0) = 0$ e quindi $c = 0$. Dunque $\tan y = x$ e quindi $y = \operatorname{arctg} x + k\pi$ e, ancora per la condizione $y(0) = \pi$ si trova $k = 1$ e in conclusione
$$y(x) = \pi + \operatorname{arctg} x.$$

2. Risolvere l'equazione differenziale
$$2y' = \frac{\log x}{xy} - \frac{y}{x \log x}$$
con la condizione
$$y(1/e) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

   Soluzione. Osserviamo che l'equazione è definita per $x > 0$, $x \neq 1$ e $y \neq 0$. Essendo data la condizione iniziale nel punto $x = 1/e < 1$, l'intervallo massimale di esistenza dovrà essere contenuto nell'intervallo $(0, 1)$.

   L'equazione è di Bernoulli, con $\alpha = -1$. Moltiplichiamo dunque l'equazione per y (ricordiamoci che $y \neq 0$) per ottenere:
$$2y'y = \frac{\log x}{x} - \frac{y^2}{x \log x}$$
poniamo quindi $z = y^2$, $z' = 2yy'$ per ottenere l'equazione lineare
$$z' + \frac{z}{x \log x} = \frac{\log x}{x}.$$
Una primitiva di $1/(x \log x)$ è $\log \log x$ dunque moltiplichiamo tutto per $\log x$. Otteniamo:
$$(z \log x)' = \frac{\log^2 x}{x}.$$

Una primitiva di $(\log^2 x)/x$ è $(\log^3 x)/3$, da cui

$$z \log x = \frac{\log^3 x}{3} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $z(1/e) = y^2(1/e) = 1/3$, si ottiene $c = 0$, e quindi

$$z = \frac{\log^2 x}{3}.$$

Essendo $z = y^2$, si ha $y = \pm\sqrt{z}$ cioè:

$$y = \pm\frac{\log x}{3}$$

e ricordando che per $x \in (0, 1)$ si ha $\log x < 0$ e visto che il dato iniziale $y(1/e)$ è positivo, otteniamo:

$$y(x) = -\frac{\log x}{3}.$$

3. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = k \sin(x + \frac{1}{k}) - k \sin x.$$

(a) Studiare la convergenza puntuale; (b) studiare la convergenza uniforme.

Soluzione. Osserviamo che

$$f_k(x) = \frac{\sin(x + \frac{1}{k}) - \sin x}{\frac{1}{k}}$$

non è altro che il rapporto incrementale della funzione sin nel punto x. Dunque per $k \to \infty$ il limite esiste ed è nient'altro che la derivata della funzione sin. Dunque la successione f_k converge puntualmente:

$$f_k(x) \to \cos x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per studiare la convergenza uniforme dobbiamo stimare la differenza tra il rapporto incrementale e la derivata. Per fare questo utilizziamo il teorema di Lagrange. Fissati x e k esisterà un punto $\xi = \xi_k(x)$ compreso tra x e $x + 1/k$, tale che

$$f_k(x) = \cos \xi_k(x).$$

Dunque si ha

$$|f_k(x) - \cos(x)| = |\cos \xi_k(x) - \cos x| \leq |\xi_k(x) - x| \leq \frac{1}{k}$$

avendo usato, nella prima disuguaglianza, la condizione di Lipschitz:

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

per la funzione $\cos x$. Visto che $1/k \to 0$, abbiamo quindi dimostrato la convergenza uniforme della successione f_k su tutto $\mathbb{R}$.

4. Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x + k)^{-2},$$

(a) studiarne la convergenga totale (in quali intervalli?)

(b) calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2}\ dx\,;$$

(c) *(facoltativo)* provare che la seguente funzione

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2}$$

è di classe C^∞ nell'intervallo $(7, +\infty)$.

Soluzione. Osserviamo che la serie è definita per $x \neq -n$ con $n \in \mathbb{N}$, ovvero per $x \in A$ dove $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$ (dove si intende $0 \notin \mathbb{N}$).

Su tale insieme si ha convergenza puntuale della serie, in quanto a x fissato la serie è asintotica a $1/k^2$ e dunque è convergente.

Per quanto riguarda la convergenza totale, consideriamo dapprima l'intervallo $(-1, +\infty)$. Osserviamo che su tale intervallo il primo termine della successione non è limitato (avendo un asintoto verticale per $x = -1$), e dunque non si può dire che la convergenza è totale. D'altra parte sugli intervalli $[-1+\varepsilon, +\infty)$ si ha convergenza totale, in quanto tutti i termini della serie sono funzioni positive e decrescenti e quindi si stimano con il loro valore nel punto $-1+\varepsilon$. Essendoci convergenza puntuale in $-1+\varepsilon$ abbiamo quindi anche la convergenza totale. Lo stesso ragionamento si può fare sugli intervalli $[-n-1+\varepsilon, -n-\varepsilon]$ con $n \in \mathbb{N}$ dove tutti i termini a parte i primi n risultano essere funzioni strettamente decrescenti.

Per quanto riguarda il punto (b) possiamo dunque dire che sull'intervallo $[0,1]$ c'è convergenza uniforme, essendoci convergenza totale su tutto $[-1+\varepsilon, +\infty)$. Dunque si può scambiare il limite con l'integrale, per ottenere

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2}\, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 (x+k)^{-2}\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-(x+k)^{-1}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi una serie telescopica, le cui somme parziali sono:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1.$$

Per quanto riguarda il punto (c) consideriamo il termine generico della serie

$$g_k(x) = (x+k)^{-2}$$

e osserviamo che possiamo calcolare esplicitamente tutte le derivate n-esime:

$$g_k^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)!(x+k)^{-n-2}$$

(la formula può essere facilmente dimostrata per induzione).

In ogni intervallo $[a, +\infty)$, con $a > -1$, ogni funzione $g_k^{(n)}$ risulta essere continua e decrescente. Dunque

$$\sup_{x \geq a} |g_k^{(n)}(x)| \leq |g_k^{(n)}(a)| = \frac{(n+1)!}{(a+k)^{n+2}} \sim \frac{1}{k^{n+2}}$$

e quindi la serie corrispondente $\sum_k g_k^n$ è totalmente convergente. Dunque procedento induttivamente, applicando il teorema di derivazione per serie, otteniamo che $f(x)$ risulta essere derivabile n volte, con n qualunque. Questo significa che f è di classe C^∞.