

Analisi Matematica 2

Prova scritta n. 5

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

31 gennaio 2011

1. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^2 + y^2) & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinare i punti in cui la funzione è continua e i punti in cui la funzione è differenziabile.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k2^k}.$$

Dimostrare che f è derivabile e calcolare $f'(0)$.

3. Trovare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2y^2 - x^2 + 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Dimostrare che l'insieme $x^4 + 4x^2 - 4xy + y^2 = 1$ rappresenta una curva regolare chiusa. Trovare inoltre i punti in cui tale curva ha come tangente una retta di coefficiente angolare $m = 2$.