Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni scheda n. 2

Ingegneria, a.a. 2009-2010

21 dicembre 2009

1. La misura dell'insieme
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^4 \leq 1\}$$
è: **(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** $\frac{4}{3}$, **(D)** $\frac{3}{4}$.
Soluzione. L'insieme A ï¿½ simmetrico rispetto all'asse delle x e all'asse delle y. Nel primo quadrante l'insieme coincide con il sottografico della funzione $x = y^2$ (rispetto all'asse delle y). Dunque l'area di un quarto di A ï¿½ data dall'integrale $\int_0^1 y^2\,dy = 1/3$. L'area totale ï¿½ dunque 4/3 e la risposta esatta ï¿½ la **(C)** .

2. Calcolare l'integrale
$$\iint_Q x^2 y\,dx\,dy$$
sul quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Il risultato è **(A)** 0, **(B)** $\frac{1}{6}$, **(C)** 1, **(D)** $\frac{1}{2}$.
Soluzione. Si puï¿½ usare la formula di riduzione sui rettangoli:
$$\begin{aligned}\iint_Q x^2 y\,dx\,dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 x^2 y\,dy\right] dx\\ &= \int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$
La soluzione corretta ï¿½ quindi **(B)** .

3. Il determinante Jacobiano $|\det D\varphi|$ della trasformazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x^2, xy)$ è **(A)** $|x^3 y|$, **(B)** $|2x^2 - y^2|$, **(C)** y^2, **(D)** $2x^2$.
Soluzione.
$$|\det D\varphi| = \left|\det \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}\right| = |2x^2| = 2x^2.$$
La risposta giusta ï¿½ quindi **(D)** .

4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma xy\,ds \qquad \text{dove } \gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi].$$

Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** -1, **(D)** π.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma xy\,ds &= \int_0^\pi \cos t \sin t |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^\pi \cos t \sin t\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

La risposta corretta ï¿½ quindi **(A)** .

5. La forma differenziale

$$\omega = \sin y\,dx + x\cos y\,dy$$

è **(A)** né chiusa né esatta, **(B)** chiusa ma non esatta, **(C)** esatta ma non chiusa, **(D)** chiusa ed esatta.

Soluzione. Posto $a(x,y) = \sin y$, $b(x,y) = x\cos y$ dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial y} &= \cos y \\ \frac{\partial b}{\partial x} &= \cos y.\end{aligned}$$

Dunque la forma ï¿½ chiusa. Siccome la forma ω ï¿½ definita su tutto $\mathbb{R}^2$ cioï¿½ su un rettangolo, la forma ï¿½ anche esatta. Dunque **(D)** .

6. Si consideri il campo vettoriale

$$\xi(x,y,z) = (x^2 + y, x - y, z).$$

Il rotore di ξ è: **(A)** $(0,0,0)$, **(B)** $(2x,-1,1)$, **(C)** $(1,-1,0)$, **(D)** $(x^2,0,0)$.

Soluzione. Usiamo la formula

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\xi &= \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right)e_3 \\ &= (0,0,1-1) = (0,0,0).\end{aligned}$$

La risposta giusta ï¿½ quindi **(A)** .

7. Calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega = x\,dx + y\,dy, \qquad \gamma(t) = (2t^3 - t, t^5 - t^2), \quad t \in [0,1].$$

Il risultato è: **(A)** -1, **(B)** 0, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** 1.

Soluzione. La forma ω ï¿½ chiusa e quindi esatta. Dunque possiamo calcolare l'integrale su un'altra curva con gli stessi estremi $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (1,0)$. Ad esempio posto $\eta(x) = (x, 0)$ sia ha:

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

La soluzione ï¿½ **(C)** .

8. L'area della superficie parametrizzata da $\varphi(u,v) = (u,v,v)$ con $u \in [0,1]$, $v \in [0,2]$ è: **(A)** π, **(B)** 2, **(C)** $2\sqrt{2}$, **(D)** $\frac{1}{2}$.

Soluzione. Si ha

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$J_{D\varphi} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

L'area della superficie ï¿½ quindi $\sqrt{2}$ volte l'area del dominio $[0,1] \times [0,2]$ ovvero $2\sqrt{2}$. Risposta **(C)** .

9. Calcolare

$$\iint_B x^2 - y^2\,dx\,dy$$

dove $B = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 3\}$. Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** $-\pi$, **(C)** π, **(D)** $\frac{\pi}{3}$.

Soluzione. Si ha

$$\iint_B x^2 - y^2\,dx\,dy = \iint_B x^2\,dx\,dy - \iint_B y^2\,dx\,dy = 0$$

in quanto il dominio B ï¿½ invariante rispetto alla simmetria $(x,y) \to (y,x)$ e quindi $\iint_B x^2 = \iint_B y^2$. Risposta **(A)** .

10. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 2,\ z \in [0,1]\}$. Calcolare

$$\int_{\partial^+\Omega} \xi \cdot \nu_\Omega\,d\sigma$$

dove $\xi(x, y, z) = (x, y, z)$. Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** 6π, **(C)** $2\sqrt{2}\pi$, **(D)** 12π.

Soluzione. Utilizziamo il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial^+\Omega} \xi \cdot \nu_\Omega \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} \xi = \int_\Omega 3 = 3|\Omega| = 6\pi.$$

Risposta **(B)** .

11. L'area della regione piana racchiusa dalla curva (data in coordinate polari) $\rho(\theta) = \sqrt{1 + \cos\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, è: **(A)** 1, **(B)** π, **(C)** $\sqrt{\pi}$, **(D)** $\sqrt{2}$.

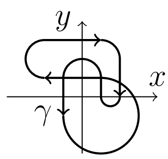
    Soluzione. L'area di una curva in coordinate polari si puï¿½ calcolare con la formula:

    $$\int \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{2}[\theta + \sin\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}2\pi = \pi.$$

    Risposta **(B)** .

12. Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove

    $$\omega = \frac{(x - y)\, dx + (x + y)\, dy}{x^2 + y^2}$$

    e γ è la curva rappresentata in figura. Il risultato è: **(A)** 0, **(B)** -2π, **(C)** 2π, **(D)** 4π.

    Soluzione. La forma si scrive come somma:

    $$\omega = \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2}.$$

    La seconda forma ï¿½ esatta e quindi dï¿½ contributo nullo su ogni percorso chiuso. La prima forma ï¿½ chiusa ma non esatta e sappiamo che per ogni avvolgimento attorno all'origine in senso antiorario dï¿½ un contributo pari a 2π. La curva in figura compie un giro in senso antiorario, dunque il suo integrale ï¿½ proprio 2π. Risposta **(C)** .