

# Analisi Matematica 2 e Complementi

## Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica  
a.a. 2009-2010

16 aprile 2010

1. Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) La funzione è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ ?  
(b) In quali punti dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^4 + y^4 \leq 1\}$$

la funzione assume il valore massimo?

*Soluzione.* Visto che  $f(x, 0) = 0$  e  $f(0, y) = 0$  deve essere  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . Per verificare se la funzione è differenziabile in  $(0, 0)$ , dobbiamo considerare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f_x(0, 0) - y f_y(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tale limite non esiste, infatti facendo la sostituzione  $x = y$  si ottiene

$$\frac{x^5}{2\sqrt{2}x^4|x|} \rightarrow \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dunque la funzione non è differenziabile in  $(0, 0)$ .

Per quanto riguarda il punto (b), si può verificare che la funzione ha punti critici solo sugli assi cartesiani:  $x = 0$  e  $y = 0$ . In tutti questi punti la funzione vale 0. Questi sono i candidati massimi all'interno del dominio.

Dobbiamo allora considerare candidati massimi sulla frontiera. Visto che sulla frontiera  $x^4 + y^4 = 1$  la funzione  $f$  coincide con  $g(x, y) = x^3y^2$ . Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla g = \lambda \nabla(x^4 + y^4) \\ g = 1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 3x^2y^2 = \lambda 4x^3 \\ 2x^3y = \lambda 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

che risolto ci dà  $x = \pm \sqrt[4]{4/5}$ ,  $y = \pm \sqrt[4]{8/15}$ . Nei due punti  $(\sqrt[4]{4/5}, \pm \sqrt[4]{8/15})$  la funzione assume lo stesso valore, positivo, che necessariamente è il valore massimo visto che negli altri due punti la funzione assume valore negativo e nei punti trovati in precedenza assumeva il valore zero.

2. Si consideri la curva  $\gamma: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita dalle equazioni parametriche  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = t(9 - t^2) \\ y(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 4). \end{cases} \quad t \in [-3, 3].$$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

*Soluzione.* La forma differenziale è chiusa ma non è esatta in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ . La curva  $\gamma$  è chiusa, in quanto  $\gamma(3) = \gamma(-3)$ . Inoltre possiamo osservare che  $\gamma$  non interseca mai il semiasse  $x = 0, y \leq 0$  infatti  $x(t) = 0$  solo per  $t = 0, t = \pm 3$  e in questi punti si ha  $y(t) > 0$ . Ora possiamo affermare che  $\omega$  è esatta se la restringiamo al piano tolto il semiasse  $x = 0, y \leq 0$ , infatti in tale regione una primitiva è data dalla funzione  $f(x, y)$  che restituisce l'angolo del punto  $(x, y)$  compreso tra  $-\pi/2$  e  $\frac{3}{2}\pi$ . Dunque possiamo concludere che l'integrale in questione è zero.

3. Calcolare

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^k} dx.$$

*Soluzione.* Posto

$$f_k(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^k}$$

osserviamo che sull'intervallo  $[0, \pi]$  si ha  $\sin x \geq 0$  e quindi  $(2 + \sin x)^k \geq 2^k$ . Inoltre sappiamo che  $|\cos x| \leq 1$ . Dunque

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$

che significa che la serie  $\sum_k f_k$  è totalmente convergente. Dunque possiamo scambiare la somma con l'integrale. Inoltre abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^k} = \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2 + \sin x} \right)^k = \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{2 + \sin x}}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la formula per la somma della serie geometrica. Ora dobbiamo calcolare

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{2 + \sin x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos x(2 + \sin x)}{1 + \sin x} dx$$

facendo il cambio di variabile  $y = \sin x$ ,  $dy = \cos x dx$  si osserva che gli estremi di integrazione diventano uguali, in quanto  $\sin \pi = \sin 0 = 0$ . Dunque il risultato è zero.

#### 4. Studiare qualitativamente le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 - 4y, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare del parametro  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

*Soluzione.* Si tratta di una equazione autonoma. Osserviamo che  $y = 0$ ,  $y = 2$  e  $y = -2$  sono soluzioni costanti. Per il teorema di esistenza e unicità le altre soluzioni non possono intersecare queste tre rette.

Per  $y_0 \in (0, 2)$  la soluzione è strettamente decrescente. Essendo limitata tra le due soluzioni costanti  $y = 0$  e  $y = 2$  deve necessariamente avere esistenza globale. Essendo monotona la soluzione ammette limite per  $x \rightarrow \pm\infty$ , e tale limite deve essere compreso nell'intervallo  $[0, 2]$ . Ma se  $y \rightarrow \bar{y}$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ , si ha  $y' \rightarrow \bar{y}^3 - 4\bar{y}$ . Tale limite deve necessariamente essere zero e quindi  $\bar{y}$  sarà  $0$  o  $\pm 2$ . Dalla monotonia della soluzione si deduce che per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $y(x) \rightarrow 0$  e per  $x \rightarrow -\infty$  si ha  $y(x) \rightarrow 2$ .

Se  $y_0 > 2$  la soluzione risulta essere strettamente crescente. Per  $x < 0$  la soluzione è limitata dal basso dalla soluzione  $y = 2$  e quindi ha esistenza fino a  $x \rightarrow -\infty$  dove la soluzione ha come asintoto  $y = 2$ . Per  $x > 0$  la soluzione non può avere un asintoto orizzontale, perché tale asintoto potrebbe essere solo  $y = 2$  cosa che è in contraddizione con la monotonia della funzione. Dunque la soluzione non è limitata. Possiamo dimostrare che la soluzione ha un asintoto

verticale, infatti si ha  $y^3 - 4y \gg y^2$  nel senso che per  $y$  abbastanza grande si ha  $y^3 - 4y > y^2$ . Siccome effettivamente la soluzione  $y(x)$  diventa grande a piacere (non è limitata) la condizione  $y^3 - 4y > y^2$  sarà verificata da un certo punto in poi. Da quel punto, i risultati di confronto ci garantiscono l'esistenza di un asintoto verticale, visto che l'equazione  $y' = y^2$  ha in effetti un asintoto verticale.

Per  $y_0 < 0$  i comportamenti qualitativi sono simmetrici. In effetti è facile verificare che se  $y(x)$  è una soluzione della nostra equazione, allora anche  $z(x) = -y(x)$  è soluzione.