Matematica I (analisi): Soluzioni degli esercizi di ricapitolazione

CdL Ottica e Optometria

18 novembre 2009

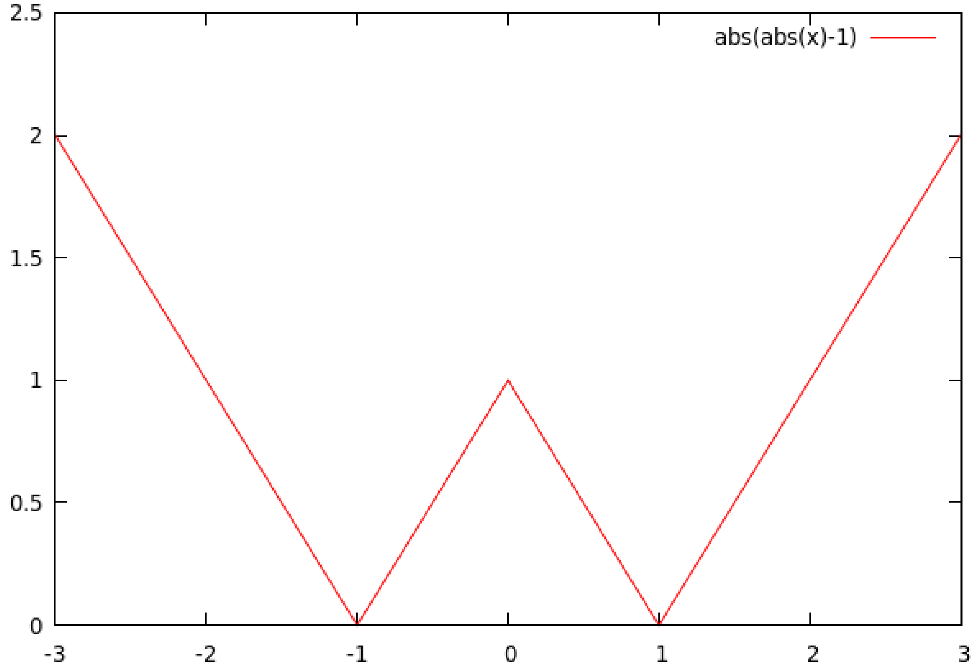
1. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4-x^3}}{x^2-x\log x}.$$
Soluzione. Si ha
$$\frac{\sqrt{x^4-x^3}}{x^2-x\log x} = \frac{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x^2(1-\frac{\log x}{x})} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1-\frac{\log x}{x}}$$
e ricordando che $1/x \to 0$ e $(\log x)/x \to 0$ per $x \to +\infty$ si ottiene immediatamente che il limite cercato è 1. (NB: nella prima versione del testo c'era il limite per $x \to -\infty$ che non ha senso, in quanto $\log x$ non è definito per $x \leq 0$)

2. (a) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}.$$
(b) verificare che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Osserviamo che la funzione $\sin(1/x)$ è limitata, mentre la funzione x è infinitesima. Dunque il limite cercato al punto (a) è 0.

Per quanto riguarda il punto (b) ricordiamo la definizione di derivata:
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0 \end{aligned}$$
per quanto visto al punto precedente. Visto che il limite esiste ed è finito, la funzione risulta essere derivabile nel punto $x = 0$.

3. Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) = \big||x|-1\big|.$$
Soluzione. Gli argomenti dei valori assoluti si annullano nei punti $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$. Begli altri il grafico della funzione è lineare con pendenza 1 o -1. È quindi facile trovare il grafico come nella figura seguente.



4. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = 6e^x - ex^3$$

è strettamente convessa.

Soluzione. Calcoliamo le derivate di f finchè non siamo in grado di studiarne il segno:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6e^x - 3ex^2 \\ f''(x) &= 6e^x - 6ex \\ f'''(x) &= 6e^x - 6e = 6(e^x - e) > 0 \iff x > 1 \end{aligned}$$

Risulta quindi che f''' è positivo per $x > 1$ e negativo per $x < 1$. Dunque $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per f''. Nel punto di minimo si ha $f''(1) = 6e - 6e = 0$. Dunque $f''(x) \geq 0$ per ogni x e $f''(1) = 0$ è l'unico punto in cui f'' si annulla. Visto che la derivata seconda è positiva e si annulla in un solo punto, la funzione risulta essere strettamente convessa.