

Analisi Matematica I

Prova scritta n. 3

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014-2015

14 luglio 2015

1. Dimostrare che per ogni $y > 0$ l'equazione

$$e^{-x} = xy$$

ha una unica soluzione positiva. Denotiamo con $f(y)$ la funzione che ad ogni $y > 0$ associa tale soluzione (ad esempio si osservi che $f(1/e) = 1$). Dimostrare che f è una funzione derivabile e calcolare $f'(1/e)$. Dimostrare inoltre che f è convessa sull'intervallo $(0, +\infty)$.

2. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Inoltre verificare che vale la disuguaglianza

$$f(x) \geq \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilizzare tale disuguaglianza per mostrare che

$$\pi < 2\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}.$$

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_0^x e^{t^2 - x^2} dt.$$

4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n};$$

stabilire inoltre se la serie converge assolutamente.