Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

PRIMA PROVA INTERCORSO: SOLUZIONI **(9 Novembre 2015)**

1. 1a) Scrivere la negazione della proposizione "Tutti gli studenti in Fisica fanno passeggiate in montagna oppure sono lettori di fantascienza, e tutti gli studenti in Matematica sanno suonare uno strumento musicale oppure amano il genere *graphic novel* (romanzi a fumetti, semplificando).
(Naturalmente, non è sufficiente scrivere "Non è vero che ...")

   1b) Determinare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ 2^{(-n)^n + n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   specificando se essi sono, rispettivamente, massimo e minimo.

2. Si consideri la successione a_n definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{a_n}\,. \end{cases}$$

   2a) Dimostrare che per $\alpha = 4/5$ si ha $a_n = \dfrac{8 + 2^{2n+1}}{16 + 2^{2n}}$;

   2b) per $\alpha = 2015$ calcolare il limite della successione a_n;

   2c) per $\alpha = 1/3$ calcolare il limite della successione a_n;

   2d) dimostrare che se $a_{2015} = 1/2$ allora $\alpha = 1/2$.

3. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5 + 3x - 7$, si chiede di

   3a) dimostrare che f è bigettiva;

   3b) calcolare $\displaystyle\lim_{y \to -3} \frac{f^{-1}(y) - 1}{y + 3}$;

   3c) determinare β in modo tale che $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^\beta} = 1$.

4. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$, e siano A e B i punti di intersezione della retta tangente al grafico G_f di f, in un suo punto P_0, con gli assi coordinati (con l'asse x e l'asse y, rispettivamente). Stabilire se esiste un punto che rende massima l'area del triangolo OAB (nel caso, determinarlo).

Esercizio 2. Per il punto 2a) possiamo applicare il principio per induzione. Ponendo $n = 1$ dobbiamo verificare che valga

$$\frac{4}{5} = \frac{8 + 2^{2+1}}{16 + 2^2}$$

mentre, per il passo induttivo, dobbiamo mostrare che

$$\frac{8 + 2^{2(n+1)+1}}{16 + 2^{2(n+1)}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{\frac{8+2^{2n+1}}{16+2^{2n}}}.$$

La verifica richiede una certa attenzione, ma non presenta difficoltà.

Per i punti successivi studiamo più in dettaglio la funzione che genera la successione. Posto $f(x) = 5/2 - 1/x$ si ha $a_{n+1} = f(a_n)$. I punti fissi di f si ottengono risolvendo l'equazione $f(x) = x$. Si trova che gli unici punti fissi sono $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 2$. Osserviamo che la funzione f è crescente sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Per il punto 2b) consideriamo l'intervallo $I = [2, +\infty)$. Tale intervallo è invariante, in quanto se $x \geq 2$ allora $f(x) \geq f(2) = 2$. Inoltre su I si ha $f(x) \leq x$ (si risolva la disequazione per verificarlo). Dunque visto che $a_1 = \alpha \in I$ scopriamo che $a_n \in I$ per ogni n e la successione a_n è decrescente. Dunque la successione converge ad un limite ℓ. Essendo f una funzione continua, il limite deve essere un punto fisso, e l'unico punto fisso nella chiusura di I è $x_2 = 2$. Dunque $a_n \to 2$.

Per il punto 2c) osserviamo che se $a_1 = \alpha = 1/3$, allora $a_2 = 5/2 - 1/a_1 = -1/2$ e $a_3 = 5/2 - 1/a_2 = 9/2$. Dunque $a_3 \in I$ e, come prima, $a_n \in n$ per ogni $n \geq 2$ e $a_n \to 2$.

Per il punto 2d) osserviamo che $f(1/2) = 1/2$ e non ci sono altri numeri x per i quali si abbia $f(x) = 1/2$ (si dimostra risolvendo l'equazione $f(x) = 1/2$). Dunque se $a_{2015} = 1/2$, sapendo che $a_{2015} = f(a_{2014})$ deduciamo che anche $a_{2014} = 1/2$. Procedendo all'indietro sugli indici della successione si arriva ad $a_1 = 1/2$ da cui $\alpha = 1/2$.

Per una dimostrazione formale si può considerare, il più piccolo intero $m \geq 1$ tale che $a_m = 1/2$. Se $m = 1$ abbiamo $\alpha = a_1 = a_m = 1/2$ e la dimostrazione è conclusa. Se fosse $m > 1$ si avrebbe $f(a_{m-1}) = a_m = 1/2$ da cui si deduce $a_{m-1} = 1/2$. Questo è assurdo perché $m - 1 < m$ e $a_{m-1} = 1/2$.

Esercizio 3. Per il punto 3a) dimostriamo che f è strettamente crescente. Infatti:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow x_1^5 + 3x_1 < x_2^5 + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

In generale si può osservare che la somma di funzioni strettamente crescenti rimane una funzione strettamente crescente. Una funzione strettamente crescente è anche iniettiva, quindi f è iniettiva.

Per la suriettività osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

ed essendo f una funzione continua sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ sappiamo che dovrà assumere tutti i valori compresi tra i due limiti: $-\infty$ e $+\infty$. Dunque la funzione è anche suriettiva. Abbiamo quindi mostrato che è biettiva.

Per il punto 3b) osserviamo che nel limite possiamo fare il cambio di variabili $y = f(x)$ in quanto essendo f continua e biettiva anche la sua inversa è continua e biettiva, dunque per

$y \to -3$ si ha $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(-3) = 1$ (visto che osserviamo si ha $f(1) = -3$). dunque:

$$\lim_{y\to -3} \frac{f^{-1}(y) - 1}{y + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^5 + 3x - 7 + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^5 + 3x - 4}.$$

Vediamo ora che quest'ultimo rapporto è una forma indeterminata perché il denominatore si annulla per $x = 1$. Questo significa però che il polinomio $x^5 + 3x - 4$ è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione di ottiene

$$\frac{x - 1}{x^5 + 3x - 4} = \frac{1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 4} \to \frac{1}{8} \qquad \text{per } x \to 1.$$

In alternativa alla divisione tra polinomi si poteva operare un'altra sostituzione: $t = x - 1$ ed espandere il polinomio in t.

Per il punto 3c) facciamo lo stesso cambio di variabili, osservando che se $y = f(x) \to +\infty$ allora anche $x = f^{-1}(y) \to +\infty$ e dunque

$$\lim_{y\to +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^\beta} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(f(x))^\beta} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x^5 + 3x - 7)^\beta} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^{5\beta}} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x^4} - \frac{7}{x^5}\right)^\beta}$$

e quest'ultimo limite può essere uguale ad 1 solamente se $5\beta = 1$ cioè $\beta = 1/5$.