**Università degli Studi di Firenze**

**Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica**

**Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini**

SECONDA PROVA INTERCORSO **(21 Dicembre 2015)**

1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$3x^2 + 3\cos^2 x - x^4 \leq 3\,,$$

e che la stima è ottimale.

2. Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{\sqrt{1+\cos(\pi x)}}\,.$$

3. Disegnare i grafici $G_f$ e $G_g$ delle funzioni $f(x) = x\sqrt{|x-2|}$ e $g(x) = \max\{0, 3x-6\}$, e calcolare l'area della figura piana delimitata da quelli (i grafici) delle restrizioni di $f$ e $g$ all'intervallo $[0,3]$.

4. Data $f(t) = \frac{\log(1+t)}{\sqrt{t}}$, si consideri la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt\,. \tag{1}$$

Si chiede di

(a) stabilire in che senso va inteso l'integrale in (1), precisando il dominio e la regolarità della funzione $F$;

(b) determinare eventuali asintoti della funzione $F(x)$, per $x \to +\infty$;

(c) stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\Big(\frac{1}{n}\Big)\,.$$

## Svolgimento

*Esercizio 1.* Allo scopo di provare la disuguaglianza del testo, è utile introdurre la funzione $h$ definita da

$$h(x) := 3x^2 + 3\cos^2 x - x^4\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

ed indagarne le proprietà (globali), quali monotonia e/o convessità (concavità).
Si osservi preliminarmente che $h$ è una funzione pari: è pertanto sufficiente analizzare la sua restrizione a $\mathbb{R}_+$. Si nota subito che $h(0) = 3$, e che $h(x) \longrightarrow -\infty$ per $x \to +\infty$, come segue immediatamente riscrivendo

$$h(x) = -x^4\Big(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3\cos^2 x}{x^4}\Big)$$

per $x \neq 0$. Il limite mostra in particolare che la stima cercata $h(x) \leq 3$ è certamente soddisfatta per $|x|$ 'sufficientemente grande'.

Si ha $h \in C^1(\mathbb{R})$, con

$$h'(x) := 6x - 6\cos x \sin x - 4x^3 = 6x - 3\sin(2x) - 4x^3\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Al fine di determinare il segno della derivata $h'(x)$, si osserva che una più accurata riscrittura di (2) produce

$$h'(x) = 3\Big(2x - \sin(2x) - \frac{4}{3}x^3\Big) = 3\Big(2x - \sin(2x) - \frac{(2x)^3}{6}\Big)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

da cui segue

$$h'(x) \leq 0 \qquad\qquad \forall x \geq 0\,,$$

richiamando la nota stima dal basso per la funzione *seno*:

$$\sin t \geq t - \frac{t^3}{6}\,, \qquad t \geq 0\,. \tag{3}$$

(Si ricorda che la stima (3) si dimostra provando la convessità della funzione $\sin t + \frac{t^3}{6}$ per $t \geq 0$, in virtù della stima elementare $\sin t \leq t$, $t \geq 0$.)
In conclusione, $h$ è monotona *decrescente* in $[0, \infty)$ e di conseguenza $h(x) \leq h(0) = 3$ per ogni $x \geq 0$; poiché $h$ è pari, essa risulta *crescente* in $(-\infty, 0]$ e la validità della stima su tutto $\mathbb{R}$ è provata. Infine, la stima risulta *ottimale* poiché $h(0) = 3$.

In alternativa, si poteva osservare che si ha anche $h \in C^2(\mathbb{R})$: derivando nuovamente in (2), si ricava

$$h''(x) = 3\Big(2 - 2\cos(2x) - 4x^2\Big) = 6\Big(1 - \cos(2x) - \frac{1}{2}(2x)^2\Big)$$

per ogni $x$; utilizzando in questo caso la stima $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$, con $2x$ in luogo di $x$, si ottiene immediatamente che $h''(x) \leq 0$ su $\mathbb{R}$. Dunque $h$ è *concava* in $\mathbb{R}$ ed il suo grafico $G_h$ sta *sotto* a tutte le rette ad esso tangenti; in particolare, alla retta tangente passante per $(0, 3)$, che ha equazione $y = 3$ dato che $h'(0) = 0$ ($x_0 = 0$ è un punto critico per $h$). Si conclude di nuovo che $h(x) \leq 3$ per ogni $x$.

(È importante sottolineare che anche nel caso non ci si avvalesse delle stime richiamate per le funzioni circolari, la tesi si ottiene ugualmente e facilmente calcolando la derivata (terza e) quarta di $h(x)$. I calcoli sono omessi e lasciati al lettore.)

*Esercizio 2.* Poniamo $x = 1 + t$ cosicché per $x \to 1$ si ha $t \to 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x} &= e^{\frac{\log x}{1-x}} - e^{-x} = e^{-1-t}(e^{\frac{\log(1+t)}{-t}+1+t} - 1) \\
&= e^{-1-t}(e^{\frac{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{-t}+1+t} - 1) = e^{-1-t}(e^{-1+\frac{t}{2}+o(t)+1+t} - 1) \\
&= e^{-1-t}(e^{\frac{3}{2}t+o(t)} - 1) = e^{-1-t}(1 + \frac{3}{2}t + o(t) - 1) \\
&= \frac{3}{2}e^{-1-t}(t + o(t))
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos(\pi x)} &= \sqrt{1+\cos(\pi+\pi t)} = \sqrt{1-\cos(\pi t)} \\
&= \sqrt{1-(1-\frac{(\pi t)^2}{2}+o(t^2))} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2}t^2+o(t^2)} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}|t|\sqrt{1+o(1)}\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{\sqrt{1+\cos(\pi x)}} &= \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\frac{3}{2}e^{-1-t}(t+o(t))}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}|t|\sqrt{1+o(1)}} \\
&= \lim_{t\to 0^\pm} \pm\frac{\frac{3}{2}e^{-1-t}(1+o(1))}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1+o(1)}} \\
&= \pm\frac{\frac{3}{2e}}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2e\pi}\,.
\end{aligned}$$

Si evince che il limite richiesto *non* esiste in quanto limite destro e limite sinistro sono tra loro diversi. (I valori dei limiti destro e sinistro sono ottenuti sopra.)

*Esercizio 3.* La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = 0$ e $x = 2$ ed è negativa per $x < 0$.

Per $x < 2$ si ha

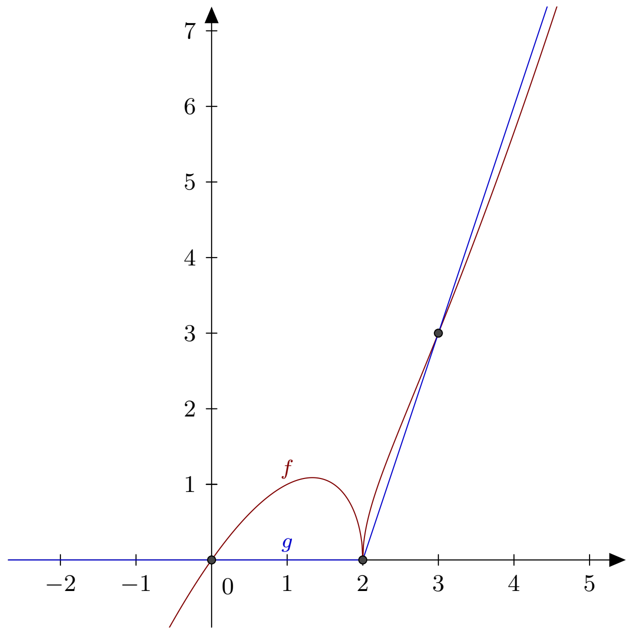
$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

da cui

$$f'(x) = \sqrt{2-x} + x\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$$

e

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-3(2\sqrt{2-x}) - (4-3x)\frac{-1}{\sqrt{2-x}}}{4(2-x)} = \frac{-6(2-x)+(4-3x)}{4(2-x)\sqrt{2-x}} \\
&= \frac{3x-8}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$




Dunque sull'intervallo $(-\infty, 4/3]$ la funzione è crescente, e su $[4/3, 2]$ è decrescente. Su tutto l'intervallo $(-\infty, 2]$ la funzione è concava.

Mentre per $x > 2$ si ha

$$f(x) = x\sqrt{x-2}$$

da cui

$$f'(x) = \sqrt{x-2} + x\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3(2\sqrt{x-2}) - (3x-4)\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{4(x-2)} = \frac{6(x-2)-(3x-4)}{4(x-2)\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{3x-8}{4(x-2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Dunque sull'intervallo $[2, +\infty)$ la funzione è crescente, su $[2, 8/3]$ è concava e su $[8/3, +\infty)$ è convessa.

Nel punto $x = 2$ c'è una cuspide, infatti la derivata destra tende a $+\infty$ e la derivata sinistra a $-\infty$. Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui, in quanto sia $f(x)$ che $f(x)/x$ tendono a $\pm\infty$.

Il grafico della funzione $g$ è l'unione di due semirette: per $x < 2$ si ha $y = 0$ per $x > 2$ si ha $y = 3x - 6$. Per $x = 2$ si ha un punto angoloso.

I grafici delle due funzioni $f$ e $g$ si incontrano nei punti $x = 0$, $x = 2$ e $x = 3$ (lo si verifica per sostituzione). Per il calcolo dell'area ci interessa sapere se ci sono altri punti, nell'intervallo $[0, 3]$ in cui le due funzioni si toccano. Per $x < 2$ non ci sono altri punti di intersezione in quanto $f$ è positiva. Per $x > 2$ osserviamo che si ha $f'(3) = 5/2 < 3 = g'(3)$.

Essendo f convessa tra 8/3 e 3 sappiamo quindi che il grafico di $f$ sta sopra la retta tangente in $x = 3$ che a sua volta sta sopra il grafico di $g$ (che è una retta più ripida della tangente). Nell'intervallo $[2, 8/3]$ la funzione $g$ è invece concava e quindi sta sopra alla retta secante. Di nuovo la retta secante sta sopra al grafico di $g$ (in quanto le due rette si intersecano in $x = 2$ mentre in $x = 3$ la retta secante abbiamo già visto che è sopra il grafico di $g$).

Dunque l'area cercata è data da:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |f(x) - g(x)|\,dx &= \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx \\ &= \int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx + \int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx - \int_2^3 (3x-6)\,dx\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i tre integrali. Nel primo facciamo la sostituzione $t = \sqrt{2-x}$ da cui $x = 2 - t^2$ e $dx = -2t\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^0 (2-t^2)t(-2t)\,dt = \int_{\sqrt{2}}^0 (-4t^2 + 2t^4)\,dt \\ &= \left[-\frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{2} = \frac{16}{15}\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Nel secondo facciamo la sostituzione $t = \sqrt{x-2}$ da cui $x = 2 + t^2$ e $dx = 2t\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx &= \int_0^1 (2+t^2)t2t\,dt = \int_0^1 (4t^2 + 2t^4)\,dt \\ &= \left[\frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{26}{15}\,.\end{aligned}$$

Il terzo integrale:

$$\int_2^3 (3x-6)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^3 = \frac{27}{2} - 18 - 6 + 12 = \frac{3}{2}\,.$$

Dunque, in conclusione:

$$\int_2^3 |f(x) - g(x)|\,dx = \frac{16}{15}\sqrt{2} + \frac{26}{15} - \frac{3}{2} = \frac{32\sqrt{2}+7}{30}\,.$$

In alternativa i primi due integrali potevano essere svolti per parti. Ad esempio:

$$\int x(x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x(x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x-2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x(x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-2)^{\frac{5}{2}}\,.$$

*Esercizio 4. 4a)* La funzione $f(t) = \frac{\log(1+t)}{\sqrt{t}}$ è definita e continua in $\mathbb{R}^+$. Di fatto $f$ è estendibile con continuità in $t = 0$, ponendo $f(0) = 0$, poiché

$$f(t) = \frac{\log(1+t)}{t}\sqrt{t} \longrightarrow 1 \cdot 0 = 0\,, \qquad \text{per } t \to 0^+;$$

in particolare, $f$ è limitata in ogni intervallo chiuso di estremi 0 e $x$ e l'integrale in (1) va inteso *secondo Riemann*[1]. La continuità di $f$ assicura che la funzione integrale $F$ è definita per ogni $x \geq 0$, e pertanto

$$\operatorname{dom} F = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\} .$$

Inoltre, indicando con $\tilde{f}$ l'estensione continua di $f$ su $\mathbb{R}_+$, il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale assicura che $F \in C^1$, con

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) = \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}\,, \qquad x > 0\,, \\ F'_+(0) &= \tilde{f}(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\,. \end{aligned}$$

*4b)* Al fine di stabilire se $F$ ammette asintoti per $x \to +\infty$, si indaga innanzitutto se esiste $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. Si riscrive, ad esempio per $x > 1$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt\,, \tag{4}$$

ove il primo addendo è un numero, mentre per il secondo si ha

$$\int_1^x f(t)\,dt \geq \int_1^x \frac{\log 2}{\sqrt{t}}\,dt \longrightarrow +\infty\,, \qquad x \to +\infty\,. \tag{5}$$

Ne consegue che $F(x) \longrightarrow +\infty$, per $x \to +\infty$ e se vi è un asintoto, questo dovrà essere obliquo.

Si discute pertanto l'esistenza del limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}\,, \tag{6}$$

ed è qui naturale esplorare l'applicabilità del Teorema di de L'Hôpital: si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} = 0\,, \tag{7}$$

da cui segue

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \tag{8}$$

e $F$ *non* ha asintoti obliqui (l'esistenza di asintoti orizzontali era già stata esclusa).

*4c)* Il carattere della serie di termine generale $a_n = F(1/n)$ scaturisce dall'analisi del comportamento asintotico di $a_n$. Si osserva innanzitutto che $a_n$ è infinitesima:

$$\lim_{n \to \infty} F(1/n) = F(0) = 0\,; \tag{9}$$

d'altra parte, utilizzando ancora una volta il limite notevole $[\log(1+x)]/x \longrightarrow 1$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F'(x)}{\frac{d}{dx}\frac{2}{3}x^{3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^{1/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,. \tag{10}$$

[1] La domanda *"in che senso va inteso ..."* è stata generalmente mal interpretata: i possibili sensi sono *secondo Riemann* oppure *in senso improprio*.

Dal Teorema di de L'Hôpital (forma 0/0) segue che anche

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\frac{2}{3}x^{3/2}} = 1\,, \tag{11}$$

cioè $F(x) \sim \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \to 0^+$.

Si conclude che $a_n = F(1/n)$ è asintotica a $b_n := \frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ converge.