

Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

APPELLO N. 3 – PROVA SCRITTA (21 Marzo 2016)

**Importante:** Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Dato l'insieme

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = n^3 e^{-n^2}, n \in \mathbb{N}\},$$

si chiede di

- 1a) determinare  $\inf A$  e  $\sup A$ , precisando se essi coincidono rispettivamente con  $\min A$  e  $\max A$  (con  $\mathbb{N}$  indichiamo l'insieme dei numeri interi *positivi*);
- 1b) dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + a_2 + C,$$

$$\text{dove } C = \int_2^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

2. Data

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x < 1,$$

provare che esiste un punto  $\bar{P} = (\bar{x}, f(\bar{x}))$  sul grafico  $G_f$  di  $f$  a distanza minima dall'origine  $(0, 0)$ . Provare inoltre che tale punto è unico e che si ha  $-\frac{1}{2} < \bar{x} < -\frac{1}{4}$ .

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log \sqrt{1+x} - \sqrt{x \log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x}.$$

4. Si consideri la funzione  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I = (-1, +\infty)$ , definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Dimostrare che  $F$  è iniettiva. Dire se l'insieme immagine  $F(I)$  è un intervallo, se è aperto/chiuso, se è limitato/illimitato. Dimostrare che per ogni  $x \in I$  si ha  $F(x) \leq x$ .

## Soluzioni

1. 1a) Richiamando dal testo la definizione dell'insieme

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = n^3 e^{-n^2}, n \in \mathbb{N}\},$$

si osserva subito che  $a_n > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e che  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , per confronto tra gli infiniti  $n^3$  (potenza) ed  $e^{n^2}$  (esponenziale). Di conseguenza, si ha  $\inf A \equiv \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$ , mentre  $A$  non ha minimo.

D'altra parte, si ha evidentemente  $a_n = f(n)$ , con  $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ , e dal fatto che  $f$  è una funzione derivabile per ogni  $x$ , con

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 (-2x) e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} (3 - 2x^2),$$

segue che la restrizione di  $f$  alla semiretta  $[1, +\infty)$  è una funzione crescente in  $[1, \sqrt{3/2}]$  e decrescente in  $[\sqrt{3/2}, \infty)$ . In particolare, la successione  $a_n$  risulta strettamente decrescente per  $n \geq 2$ , e si ha  $a_n \leq a_2 = 8e^{-4}$  per ogni  $n \geq 2$ . Calcolando  $a_1 = e^{-1}$  e osservando che  $a_1 = e^{-1} > 8e^{-4} = a_2$  (infatti  $e^3 > 8$  dato che  $e > 2$ ), si conclude che  $a_n$  è in effetti decrescente in senso stretto e  $\max_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_1 = 1/e$ .

Riassumendo, si ha

$$\inf A = 0, \quad \sup A = \max A = \frac{1}{e}.$$

1b) La stima richiesta per la somma  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  si ottiene facilmente utilizzando il fatto che  $f(x)$  è decrescente per  $x \geq 2$ . Si ha infatti per  $n \geq 3$ :

$$a_n = f(n) = \int_{n-1}^n f(n) dx \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$

da cui

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=3}^{\infty} \int_{n-1}^n f(x) dx = \int_2^{\infty} f(x) dx = C. \quad (1)$$

La stima (1) implica immediatamente la stima richiesta per  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Si osservi che è possibile calcolare esplicitamente il valore di  $C$ : infatti, integrando per parti, si perviene facilmente a

$$\int_2^c x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2} \Big|_2^c \longrightarrow \frac{5}{2}e^{-4}, \quad c \rightarrow +\infty,$$

e la definizione di integrale in senso improprio fornisce  $C = 5/(2e^4)$ .

2. Il grafico  $G_f$  di

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x < 1,$$

è un arco di iperbole contenuto nel semipiano  $y > 0$ . Se  $P = (x, f(x))$  è un suo punto generico e  $O = (0, 0)$ , il quadrato della distanza di  $P$  da  $O$  è la funzione  $g: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue:

$$d^2(P, O) = x^2 + [f(x)]^2 = x^2 + \frac{1}{(1-x)^2} =: g(x), \quad x < 1.$$

Si osserva che  $g$  è una funzione continua in  $I = (-\infty, 1)$ , con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty;$$

di conseguenza,  $g$  ammette minimo assoluto in  $I$  (si tratta di una controparte/conseguenza del Teorema di Weierstrass), che risponde alla prima richiesta. Anche senza utilizzare il risultato citato, al fine di individuare il/i punto/i di minimo, si osserva che  $g$  è derivabile in  $I$ , con

$$g'(x) = 2x + 2f(x)f'(x) = 2\left[x + \frac{1}{(1-x)^3}\right], \quad x \in I,$$

il cui segno in  $I$  non è di facile individuazione. Osservando che  $g'$  è una funzione continua in  $I$ , con  $g'(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow -\infty$  e  $g'(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 1^-$ , il *Teorema degli zeri* assicura che l'equazione  $g'(x) = 0$ , cioè

$$x + \frac{1}{(1-x)^3} = 0, \tag{2}$$

ha almeno una soluzione  $\bar{x}$  in  $I$ . (È importante sottolineare che uno zero di  $g'$  – ovvero un punto critico di  $g$  – non è detto sia di estremo per  $g$ .)

Si prosegue calcolando

$$g''(x) = 2\left[1 + \frac{1}{(x-1)^4}\right] > 0 \quad \forall x \in I,$$

che implica che  $g$  è una funzione strettamente convessa in  $I$  e l'unico punto critico  $\bar{x}$  è effettivamente di minimo assoluto per  $g$  (in maniera equivalente, da  $g''(x) > 0$  in  $I$  segue che  $g'$  è strettamente crescente ed ha un solo zero in  $I$ ). Infine, che  $\bar{x}$  appartenga all'intervallo  $(-1/2, -1/4)$  segue facilmente dal fatto che

$$g'(-\frac{1}{2}) = -\frac{11}{27} < 0, \quad g'(-\frac{1}{4}) = \frac{131}{128} > 0,$$

applicando ancora una volta il *Teorema degli zeri*.

In modo equivalente e geometricamente intuitivo si poteva argomentare anche nel modo seguente: il punto  $\bar{P}$  cercato su  $G_f$  è il punto in cui la congiungente  $O$  a  $G_f$  risulta perpendicolare a  $G_f$  in  $\bar{P}$ . Un retta del fascio di centro  $O$  di equazione  $y = mx$  passa per  $\bar{P}$  se  $f(\bar{x}) = m\bar{x}$ , cioè se  $m = [\bar{x}(1 - \bar{x})]^{-1}$ ; d'altra parte essa sarà perpendicolare a  $G_f$  se si ha anche  $m = -1/m'$ , ove  $m'$  è il coefficiente angolare della tangente a  $G_f$  in  $\bar{P}$ . Poiché  $m' = f'(\bar{x}) = 1/(1 - \bar{x})^2$ , si ottiene anche  $m = -(1 - \bar{x})^2$ .

Uguagliando le due espressioni di  $m$ , si conclude che  $\bar{x}$  deve risolvere l'equazione

$$\frac{1}{x(1-x)} = -(1-x)^2,$$

con  $x < 1$ , che non è altro se non l'equazione (2). A questo punto si procede come sopra.

**3.** Osserviamo che per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$2 \log \sqrt{1+x} = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x \log(1+x)} &= \sqrt{x \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)} = \sqrt{x^2 \left( 1 - \frac{x}{2} + o(x) \right)} \\ &= |x| \left( 1 - \frac{x}{2} + o(x) \right)^{\frac{1}{2}} = |x| \left( 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2} + o(x) \right) + o(x) \right) \\ &= |x| \left( 1 - \frac{x}{4} + o(x) \right) = |x| - \frac{x|x|}{4} + o(x^2) \end{aligned}$$

e infine:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sin x = x + o(x^2).$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{2 \log \sqrt{1+x} - \sqrt{x \log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} - |x| + \frac{x|x|}{4} + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) - x + o(x^2)} \\ &= \frac{x - |x| - \frac{x^2}{2} + \frac{x|x|}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}. \end{aligned}$$

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha dunque

$$\frac{2 \log \sqrt{1+x} - \sqrt{x \log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x} = \frac{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

mentre per  $x \rightarrow 0^-$  si ha

$$\frac{2 \log \sqrt{1+x} - \sqrt{x \log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x} = \frac{2x + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{2 + o(1)}{x + o(x)} \rightarrow -\infty.$$

4. Sia  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ ,  $t \in (-1, \infty) = I$ . Poiché  $f \in C^0(I)$ ,  $f$  è continua in ogni intervallo chiuso di estremi 0 e  $x$ ,  $x > -1$ : per il Teorema fondamentale del Calcolo integrale, la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

appartiene a  $C^1(I)$ , con

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}, \quad x \in I.$$

Da  $F'(x) > 0$  per ogni  $x > -1$  segue che la  $F$  è strettamente crescente in  $I$ ; di conseguenza,  $F$  risulta iniettiva. (È importante sottolineare che le due proprietà non sono equivalenti: esistono funzioni iniettive che non sono monotone, e gli esempi sono elementari.)

Dalla continuità di  $F$  nell'intervallo  $I$  segue che  $F(I)$  è un intervallo; dal fatto che  $F$  è crescente nell'aperto  $I$  si deduce che  $F(I)$  è l'intervallo *aperto* di estremi rispettivamente  $\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x)$ , e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ . Per stabilire se i limiti suddetti sono finiti o infiniti (i limiti esistono: perché?), si producono le due stime asintotiche

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t+t^2}} \sim \frac{C_1}{\sqrt{1+t}}, \quad t \rightarrow -1^+$$

mentre

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

che assicurano la convergenza di entrambi gli integrali

$$\int_0^{-1} f(t) dt = - \int_{-1}^0 f(t) dt, \quad \int_0^{\infty} f(t) dt.$$

Si conclude che  $F(I)$  è un intervallo limitato.

Infine, la stima  $F(x) \leq x$  segue facilmente calcolando

$$F''(x) = f'(x) = -\frac{3}{2}x^2\sqrt{(1+x^3)^3}$$

e osservando che  $F''(x) \leq 0$  in  $I$ . Dunque  $F$  è concava in  $I$  ed il suo grafico sta *sotto* a tutte le rette ad esso tangenti. In particolare esso sta sotto alla retta tangente per  $(0,0)$ , di equazione  $y = x$  ( $F'(0) = f(0) = 1$ ), ovvero  $F(x) \leq x$  in  $I$ .