Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

APPELLO N. 4 – PROVA SCRITTA **(13 Giugno 2016)**

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

e sia a_n una successione tale che $a_{n+1} = f(a_n)$. Si chiede di dimostrare che

i) per ogni $n \geq 1$ si ha $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_2 - a_1|}{2^{n-1}}$;

ii) la serie $\sum(a_{n+1} - a_n)$ è convergente;

iii) la successione a_n è convergente;

iv) se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f soddisfa la proprietà (1).

2. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione:

$$x^3 + 1 = 3x.$$

Dimostrare che una soluzione è compresa tra $1,5$ e $1,6$.

3. Dopo aver disegnato la regione D del primo quadrante delimitata dall'asse x e dalle curve di equazione $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 - y^2 = 9$, calcolarne l'area.

Attenzione: non ci si preoccupi se alcuni valori di funzioni trigonometriche/iperboliche e/o relative funzioni inverse non sono calcolabili esplicitamente.

4. Data $a_n = \dfrac{n}{n+1} \sin \dfrac{1}{n}$, stabilire il carattere delle serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, fornendo rigorose ed esaurienti giustificazioni. Fornire una stima del resto n-esimo di quella/e eventualmente convergente/i.