Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

4 maggio 2018

1. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} u' - u \sin x = \sin(2x), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine: $u'(x) + a(x)u(x) = b(x)$. Possiamo risolverla col metodo del fattore integrante, cioè moltiplicare l'equazione per $e^{A(x)}$ con $A \in \int a$. Nel caso specifico bisogna moltiplicare per $e^{\cos x}$ ottenendo:
$$u' e^{\cos x} - u \sin x e^{\cos x} = \sin(2x) e^{\cos x}$$
il lato sinistro è la derivata di un prodotto
$$(u e^{\cos x})' = 2 \sin x \cos x e^{\cos x}.$$
Integriamo il lato destro per sostituzione. Ponendo $y = \cos x$, $dy = -\sin x\, dx$ si ottiene:
$$\int 2 \sin x \cos x e^{\cos x}\, dx = -2 \int y e^y\, dy$$
e poi per parti
$$-2 \int y e^y\, dy = -2 y e^y + 2 \int e^y\, dy = (2 - 2y) e^y$$
da cui
$$u e^{\cos x} = (2 - 2 \cos x) e^{\cos x} + c.$$
Imponendo la condizione di cauchy $u(0) = 1$ si ottiene
$$1 e^1 = 0 + c$$
ovvero $c = e$. Dunque, moltiplicando tutto per $e^{-\cos x}$ si ottiene:
$$u(x) = 2 - 2 \cos x + e^{1 - \cos x}.$$

$\square$

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - 4u' + 3u = \frac{2e^{3x}}{e^x + 1} + 2\sin x.$$

Svolgimento. Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine, non omogenea, a coefficienti costanti. Le soluzioni si ottengono sommando la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alle soluzioni particolari delle omogenee con termine noto i due addendi al lato destro.

L'equazione omogenea associata è $u'' - 4u' + 3u = 0$ si scrive nella forma $P(D)u = 0$ se P è il polinomio associato $P(z) = z^2 - 4z + 3$. Il polinomio si fattorizza $P(z) = (z-3)(z-1)$ e dunque due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea sono $u_1(x) = e^3x$ e $u_2(x) = e^x$. La soluzione generale dell'omogenea sarà dunque della forma:

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $u'' - 4u' + 3u = 2\sin x$. Possiamo usare il metodo di similarità che ci garantisce che esiste una soluzione della forma

$$u(x) = a\sin x + b\cos x.$$

Per tale funzione si ha:

$$u'(x) = -b\sin x + a\cos x$$
$$u''(x) = -a\sin x - b\cos x$$

e dunque l'equazione $u'' - 4u' + 3u = 2\sin x$ diventa

$$(-a + 4b + 3a)\sin x + (-b - 4a + 3b)\cos x = 2\sin x$$

da cui, imponendo l'uguaglianza dei coefficienti delle funzioni (indipendenti) $\sin x$ e $\cos x$, si trova

$$\begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 2b - 4a = 0 \end{cases}$$

che risolto dà: $a = 1/5$, $b = 2/5$. Dunque una soluzione particolare è

$$u_3(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione $u'' - 4u' + 3u = 2e^{3x}/e^x + 1$. Utilizziamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cerchiamo quindi una soluzione della forma:

$$u(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^x.$$

Se imponiamo che valga

$$c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x = 0$$

la derivata è

$$u'(x) = 3c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^x$$

e la derivata seconda:

$$u''(x) = 9c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^x + 3c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x.$$

Dunque affinché sia soddisfatta l'equazione si dovrà avere

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x = 0 \\ 3c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x = \frac{2e^{3x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{e^x+1} \\ \\ c_2'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

Integrando con la sostituzione $y = e^x$, $dx = dy/y$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \frac{1}{e^x+1}\, dx = \int \frac{1}{(y+1)y}\, dy \\ &= \int \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right] dy = \ln y - \ln(1+y) = x - \ln(1+e^x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(x) &= -\int \frac{y^2}{(y+1)y}\, dy = -\int \left[1 - \frac{y}{y^2+1}\right] dy \\ &= -y + \frac{1}{2}\int \frac{2y+1}{y^2+y}\, dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(y+1)y}\, dy \\ &= -y + \frac{1}{2}\ln(y^2+y) - \frac{1}{2}(\ln y - \ln(1+y)) \\ &= -e^x + \frac{1}{2}(x + \ln(1+e^x)) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+e^x) \\ &= \ln(1+e^x) - e^x. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione particolare cercata è

$$u_4(x) = [x - \ln(1+e^x)]\, e^{3x} + [\ln(1+e^x) - e^x]\, e^x.$$

La soluzione generale dell'equazione iniziale è dunque:

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) \\ &= [c_1 + x - \ln(1 + e^x)]\, e^{3x} + [c_2 + \ln(1 + e^x) - e^x]\, e^x \\ &\quad + \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x \end{aligned}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \dfrac{3x^2\sqrt{1-u^4}}{2u} \\ \\ u(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

trovarne la soluzione verificando l'intervallo massimale di esistenza.

Soluzione. Si tratta di un problema di Cauchy con una equazione a variabili separabili. Osserviamo che l'equazione è definita solo se $u \in [-1, 1]$ e $u \neq 0$. Visto che nel dato iniziale si ha $u(0) > 0$ e visto che la soluzione dovrà essere continua e definita su un intervallo e non si può avere $u(x) = 0$, dovrà essere $u(x) > 0$ per ogni x. Se $u(x) = \pm 1$ il lato destro dell'equazione si annulla. Dunque le funzioni costanti $u(x) = 1$ e $u(x) = -1$ sono soluzioni dell'equazione differenziali ma non soddisfano la condizione iniziale. Osserviamo che l'equazione non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità perché la funzione sul lato destro non è lipschitziana in nessun intorno dei punti $u = \pm 1$. Dunque non possiamo escludere che la soluzione con dato iniziale $u(0) = 1/\sqrt{2}$ possa "attaccarsi" alla soluzione stazionaria $u(x) = 1$.

Comunque, nei punti in cui $u(x) < 1$ l'equazione risulta equivalente all'equazione a variabili separate:

$$\frac{2uu'}{\sqrt{1-u^4}} = 3x^2.$$

Integrando ambo i membri si ottiene

$$\int \frac{2u\,du}{\sqrt{1-u^4}} \ni x^3.$$

Per quanto riguarda il lato sinistro si nota che

$$\int \frac{2u\,du}{\sqrt{1-u^4}} \ni \arcsin(u^2).$$

Dunque su ogni intervallo in cui $u(x) \neq \pm 1$ si ha

$$\arcsin(u^2(x)) = x^3 + c.$$

In particolare se l'intervallo contiene il punto $x = 0$ possiamo imporre la condizione iniziale $u(0) = 1/\sqrt{2}$ da cui si ottiene $c = \arcsin(1/2) = \pi/6$. Ricordiamo ora che $u(x) \in (0, 1)$ e dunque $\arcsin(u^2(x)) \in (0, \pi/2)$ dunque dovrà essere

$$x^3 + \frac{\pi}{6} \in (0, \pi/2)$$

ovvero

$$-\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} < x \leq \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}.$$

Con tale condizione possiamo invertire l'arcoseno, ottenendo:

$$u^2(x) = \sin(x^3 + \pi/6).$$

Con la condizione che abbiamo già imposto risulta anche che il lato destro sia positivo, dunque possiamo invertire anche l'elevamento a quadrato ottenendo (ricordiamo che $u > 0$)

$$u(x) = \sqrt{\sin\left(x^3 + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Ora osserviamo che per $x \to -\sqrt[3]{\pi/6}^{\,+}$ si ha $u(x) \to 0$ e la soluzione non può essere estesa perchè il valore $u = 0$ non è ammesso nell'equazione. Invece per $x \to \sqrt[3]{\pi/3}$ si ha $u(x) \to 1$ e, guardando l'equazione, $u'(x) \to 0$. Dunque possiamo estendere la soluzione ponendo $u(x) = 1$ per $x = \sqrt[3]{\pi/3}$. A questo punto la soluzione costante $u = 1$ è soluzione e dunque la funzione

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin(x^3 + \pi 6)} & \text{per } -\sqrt[3]{\pi/6} < x < \sqrt[3]{\pi/3} \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è una soluzione definita su un intervallo massimale. Non ci possono essere altre soluzioni, perché una volta che la soluzione ha raggiunto il valore $u = 1$ non può diventare maggiore in quanto l'equazione non è definita per $u > 1$, e non può decrescere perché se la soluzione soddisfa l'equazione, si ha $u'(x) \geq 0$ se $u > 0$. $\square$