Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

29 maggio 2018

1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$6 \sin x \leq 6x - x^3 + x^4.$$

Soluzione. Posto
$$f(x) = 6x - x^3 + x^4 - 6 \sin x$$
dobbiamo mostrare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per studiare il segno della funzione calcoliamo le derivate successive:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 - 3x^2 + 4x^3 - 6 \cos x, \\ f''(x) &= -6x + 12x^2 + 6 \sin x, \\ f'''(x) &= -6 + 24x + 6 \cos x, \\ f''''(x) &= 24 - 6 \sin x. \end{aligned}$$
Essendo $|\sin x| \leq 1$ si ha $f''''(x) \geq 24 - 6 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f''' è strettamente crescente. Visto che $f'''(0) = 0$ possiamo concludere che $f'''(x) > 0$ per $x > 0$ e $f'''(x) < 0$ per $x < 0$. Dunque $f''(x)$ ha un minimo assoluto per $x = 0$ ed essendo $f''(0) = 0$ significa che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma allora $f'(x)$ è crescente e, ancora, essendo $f'(0) = 0$ deduciamo che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$ per $x \leq 0$. Dunque f ha un minimo assoluto in $x = 0$ ed essendo $f(0) = 0$ deduciamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, come dovevamo dimostrare. $\square$

Soluzione alternativa. La formula di Taylor con il resto di Lagrange garantisce che esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \sin \xi \cdot \frac{x^4}{4!}.$$

(la derivata quarta di $\sin x$ è $\sin x$). Dunque si ha, sfruttando il fatto che $\sin \xi \leq 1$:

$$\begin{aligned}6 \sin x &= 6x - x^3 + \sin \xi \cdot \frac{x^4}{4} \\ &\leq 6x - x^3 + \frac{x^4}{4} \\ &\leq 6x - x^3 + x^4.\end{aligned}$$

$\square$

Ulteriore soluzione alternativa. Ricordando lo sviluppo in serie della funzione seno

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}.$$

si ottiene

$$\begin{aligned}f(x) = 6x - x^3 + x^4 - 6 \sin x &= x^4 - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!} \\ &= x^4 \left[1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+5)!} \right] \geq x^4 \left[1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+5)!} \right].\end{aligned}$$

Notiamo ora che $(2k+5)! \geq (2k+1)! \cdot 4!$ (in generale $(n+m)! \geq n!m!$) dunque, completando la serie esponenziale, si ha:

$$\begin{aligned}f(x) &\geq x^4 \left[1 - \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \geq x^4 \left[1 - \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \right] \\ &= x^4 \left[1 - \frac{e^{|x|}}{4!} \right] \geq x^4 \left[1 - \frac{3^{|x|}}{24} \right].\end{aligned}$$

Se $|x| \leq 2$ possiamo allora concludere:

$$f(x) \geq x^4 \left[1 - \frac{3^2}{24} \right] = \frac{5}{8} x^4 \geq 0.$$

Se $x \geq 2$ allora $6x \geq 0$ e $-\sin x \geq -1$ da cui

$$f(x) \geq x^4 - x^3 - 6 = x^3(x-1) - 6 \geq 2^3(2-1) - 6 = 2 \geq 0.$$

Se $x \leq -3$ si ha $x = -|x|$, $-\sin x \geq -1$, $|x|^4 \geq |x|^3$ e quindi

$$\begin{aligned}f(x) &\geq -6|x| + |x|^3 + |x|^4 - 6 \geq -6|x| + 2|x|^3 - 6 \\ &\geq 2|x|\big(|x|^2 - 3\big) - 6 \geq 6(9-3) - 6 = 30 \geq 0.\end{aligned}$$

Se $-3 \le x \le -2$ osserviamo che $x \in (-\pi, 0)$ e quindi $\sin x \ge 0$. Dunque

$$\begin{aligned} f(x) &\ge -6|x| + \left|x^3\right| + \left|x^4\right| \ge \left|x^4\right| - 6|x| \\ &= |x|\left[|x|^3 - 6\right] \ge |x|[8-6] \ge 0. \end{aligned}$$

□

2. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^\alpha \int_0^k e^{-k^2x^2}\, dx.$$

Soluzione. Facendo il cambio di variabile $x = y/k$, $dx = dy/k$ si osserva che

$$b_k = \int_0^k e^{-k^2x^2}\, dx = \frac{1}{k}\int_0^{k^2} e^{-y^2}\, dy.$$

L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy$ è positivo e notoriamente convergente, quindi $k \cdot b_k \to L \in (0, +\infty)$ per $k \to +\infty$. Dunque il termine generico $a_k = k^\alpha b_k$ della serie data è asintoticamente equivalente a $k^{\alpha-1}L$. La serie è a termini positivi e dunque il suo carattere coincide con il carattere della serie $\sum k^{\alpha-1}$ che è una serie armonica generalizzata. Sappiamo quindi che la serie converge per $\alpha - 1 < -1$ cioè per $\alpha < 0$ e diverge altrimenti. □

3. Trovare tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una funzione $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale $u'' = \lambda u$ è una equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - \lambda$. Se $\lambda > 0$ le radici del polinomio caratteristico sono reali e precisamente $\pm\sqrt{\lambda}$ dunque le soluzioni dell'equazione differenziale sono della forma

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La condizione $u(0) = 0$ ci dice che $c_1 + c_2 = 0$ da cui $c_2 = -c_1$ e quindi

$$u(x) = c_1\left[e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right]$$

e la condizione $u(1) = 0$ ci dice allora che $c_1 = 0$ in quanto la quantità tra parentesi quadre è positiva se $x > 0$ e $\lambda > 0$. Dunque $u(x) = 0$ ma allora non è possibile che sia $u'(0) = 1$. Non ci sono dunque soluzioni con $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$ l'equazione diventa $u''(x) = 0$ le cui soluzioni sono

$$u(x) = c_1 x + c_2.$$

se $u(0) = u(1) = 0$ si trova, come prima, $c_1 = c_2 = 0$ e quindi $u(x) = 0$ e $u'(0) = 0$. Neanche in questo caso ci sono soluzioni.

Se $\lambda < 0$ le radici del polinomio caratteristico sono complesse coniugate, più precisamente sono: $\pm i\sqrt{-\lambda}$ e tutte le soluzioni reali dell'equazione differenziale possono quindi essere scritte nella forma:

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ponendo $u(0) = 0$ si ottiene $c_2 = 0$ e quindi:

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda} x)$$

da cui

$$u(1) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}).$$

Imponendo $u(1) = 0$ si ottiene quindi

$$\sqrt{-\lambda} = k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Visto che k e $-k$ danno lo stesso valore di λ possiamo restringerci a $k \in \mathbb{N}$ e visto che $\lambda < 0$ dobbiamo escludere $k = 0$, dunque si ha:

$$\lambda = -k^2\pi^2, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si ha inoltre

$$u'(0) = \sqrt{-\lambda} c_1$$

e quindi la condizione $u'(0) = 1$ può essere certamente soddisfatta scegliendo

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}.$$

$\square$