

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

18 giugno 2018

1. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

*Soluzione.* Osserviamo che il primo integrale tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$  in quanto la funzione integranda è positiva e non infinitesima. Il secondo integrale, invece, tende a zero in quanto la funzione integranda è sommabile e quindi la coda dell'integrale tende a zero. Siamo quindi di fronte ad una forma indeterminata  $+\infty \cdot 0$  che possiamo cercare di risolvere con il teorema di de l'Hospital. Possiamo ricondurci ad una forma  $0/0$ :

$$\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\frac{1}{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt}}.$$

Il rapporto delle derivate risulta quindi

$$\frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{-\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt\right)^2}} = \left(\frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt}{e^{\frac{x^2}{2}}}\right)^2.$$

Abbiamo ottenuto nuovamente una forma indeterminata, stavolta del tipo  $+\infty/(+\infty)$ . Possiamo provare ad applicare nuovamente de l'Hospital. Il rapporto delle derivate è:

$$\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty.$$

Dunque 0 è anche il risultato del limite iniziale. □

*Soluzione alternativa.* Possiamo applicare lo stesso metodo della soluzione precedente alla forma indeterminata  $+\infty/+\infty$ :

$$\frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt}{\frac{1}{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}}.$$

□

*Ulteriore soluzione alternativa.* Si può scrivere

$$\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt}{e^{\frac{x^2}{2}}} \cdot \frac{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

e applicare il teorema di de l'Hospital ai due rapporti separatamente. Si trova quindi che entrambi tendono a zero, quindi il prodotto pure tende a zero. □

2. Posto  $f(x) = \ln(\cos(x + x^2))$  calcolare  $f^{(4)}(0)$  e  $f^{(5)}(0)$ .

*Dimostrazione.* Soluzione. Puntiamo a scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 della funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Utilizzeremo i seguenti noti sviluppi per  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \cos(x + x^2) &= 1 - \frac{(x + x^2)^2}{2} + \frac{(x + x^2)^4}{24} + o((x + x^2)^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{4x^5}{24} + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x + x^2)) &= -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5) - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 + o \left( \left( \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{2} + o(x^5) \\ &= -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{14}{4!}x^4 - \frac{40}{5!}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Visto che l'unico polinomio  $P(x)$  di grado non superiore a 5 per cui valga  $f(x) = P(x) + o(x^5)$  è il polinomio di Taylor:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

per il principio di identità dei polinomi deduciamo che

$$f^{(4)}(0) = -14, \quad f^{(5)}(0) = -40.$$

□

3. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-n}^n \sqrt[4]{1+x^4} dx.$$

*Soluzione.* E' facile verificare che si ha

$$|x| \leq \sqrt[4]{1+x^4} \leq 1 + |x|$$

da cui

$$\frac{1}{n^2} \int_{-n}^n |x| dx \leq \frac{1}{n^2} \int_{-n}^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \leq \frac{1}{n^2} \int_{-n}^n (1 + |x|) dx.$$

E visto che si ha

$$\int_{-n}^n |x| dx = 2 \int_0^n x dx = n^2, \quad \int_{-n}^n 1 dx = 2n$$

otteniamo:

$$1 \leq \frac{1}{n^2} \int_{-n}^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \leq \frac{2}{n} + 1.$$

Per il teorema dei carabinieri, il limite cercato è 1. □

*Soluzione alternativa.* Con il cambio di variabile  $x = ny$ ,  $dx = ndy$  si ottiene

$$\frac{1}{n^2} \int_{-n}^n \sqrt[4]{1+x^4} dx = \frac{1}{n^2} \int_{-1}^1 \sqrt[4]{1+n^4y^4} ndy = \int_{-1}^1 \sqrt[4]{\frac{1}{n^4} + y^4} dy.$$

Posto

$$f_n(y) = \sqrt[4]{\frac{1}{n^4} + y^4}$$

Si osserva che per ogni  $y \in \mathbb{R}$  si ha  $f_n(y) \rightarrow |y|$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Con un opportuno studio di funzione possiamo dimostrare che la funzione  $f_n(y) - |y|$  ha massimo per  $y = 0$  e dunque

$$\sup |f_n(y) - |y|| = f_n(0) - 0 = \frac{1}{n^4} \rightarrow 0.$$

Significa che  $f_n(y) \rightarrow |y|$  uniformemente. Dunque si può scambiare il limite con l'integrale per ottenere:

$$\int_{-1}^1 \sqrt[4]{\frac{1}{n^4} + y^4} dy \rightarrow \int_{-1}^1 |y| dy = 2 \int_0^1 y dy = 1.$$

□

*Ulteriore soluzione.* Possiamo provare a calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-x}^x \sqrt[4]{1+t^4} dt}{x^2}$$

tramite il teorema di de l'Hospital. E' chiaro infatti che numeratore e denominatore tendono entrambi a  $+\infty$  (al numeratore abbiamo una funzione positiva ma non infinitesima). Il rapporto delle derivate è

$$\frac{2\sqrt[4]{1+x^4}}{2x} = \sqrt[4]{\frac{1}{x^4} + 1} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Dunque l'Hospital può essere applicato e il limite di funzione che abbiamo introdotto vale anch'esso 1. Visto che il limite di funzione esiste, per il teorema di collegamento tra limiti di funzione e limiti di successione possiamo affermare che anche il limite della successione esiste ed è uguale. □